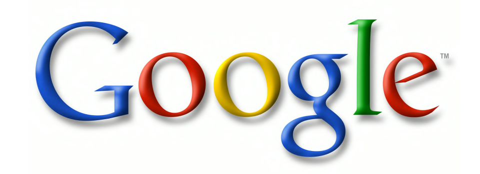
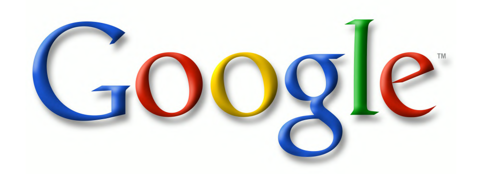
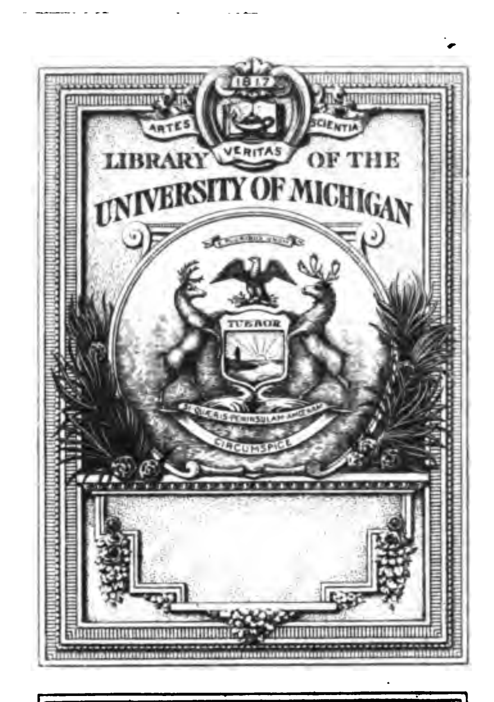





1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Privatunterricht

bearbeitet

von

Dr. *August Wiegand*,

Oberlehrer der Mathematik und erstem Collegen an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen zu Halle, Mitgliede des naturwissenschaftlichen Vereins daselbst.

Erster Cursus der Planimetrie.

Vierte, verbesserte Auflage.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1852.

Erster Cursus

der

Planimetrie.

Für

Gymnasien, Real- und Bürgerschulen

und zum Gebrauche für Hauslehrer

bearbeitet

von

Dr. *August Wiegand*,

Oberlehrer der Mathematik und erstem Collegen an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen zu Halle, Mitgliede des naturwissenschaftlichen Vereins daselbst.

Vierte, verbesserte Auflage.

Mit zwei Kupfertafeln und vierundzwanzig Holzschnitten.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1852.

Vorrede zur ersten Auflage.

Ueber die zweckmässigste Einrichtung eines mathematischen Lehrbuchs für Schulen sind die Meinungen getheilt. Der Eine hält diejenigen Bücher für die zweckmässigsten, die mit einer solchen Ausführlichkeit behandelt sind, dass sie ohne Zuthun des Lehrers von jedem Schüler verstanden werden können; der Andere aber redet denen das Wort, welche über die Beweise und Auflösungen der Aufgaben nur kurze Andeutungen geben und so dem Lehrer die weitere Ausführung vorbehalten. Für jede der beiden Meinungen lässt sich viel sagen, und jede hat auch bedeutende Autoritäten unter den Mathematikern für sich. Ich jedoch für meinen Theil kann mich für keine derselben ausschliessend erklären, und da die besseren vorhandenen Lehrbücher entweder in dem einen oder andern Sinne abgefasst sind, so entschloss ich mich — zunächst für das Bedürfniss der hiesigen Realschule — selbst ein Compendium abzufassen, in welchem die beiden Behandlungsweisen der Lehrbücher so viel als möglich vermittelt würden. Eine solche Vermittelung habe ich aber nicht etwa dadurch zu erreichen gehofft, dass ich mich in meinem Lehrbuche in Bezug auf Ausführlichkeit zwischen oben erwähnten Compendien in der Mitte gehalten, und also nur von dem einen genommen und zum andern etwas zugegeben hätte. Hierdurch würden mit den Nachtheilen der vorigen auch ihre Vortheile vermindert und also kein absoluter Gewinn erlangt worden sein. Die rechte Vermittelung kann nur dasjenige Lehrbuch bewirken, welches die Vortheile beider Arten gewährt, ohne ihre Nachtheile mit sich zu führen. Um die Anforderungen an ein solches aber in das rechte Licht zu stellen, müssen wir zunächst die Vortheile und Nachtheile vorerwähnter Lehrbücher beleuchten. Die ausführlich behandelten Bücher haben das Gute, dass die Schüler sich

auf ihre Lectionen jederzeit vollständig vorbereiten können, dass sie in den Stand gesetzt sind, durch Versäumniss entstandene Lücken selbstständig auszufüllen und dass auch die schwächeren Schüler, die kein gut ausgearbeitetes Heft in den Händen haben, das Dagewesene im Zusammenhange repetiren können. Dagegen wird durch solche Lehrbücher die heuristische Methode, die den Schülern erst das rechte und wahre Interesse am mathematischen Unterrichte verschafft, und sie befähigt, selbstständige Studien zu machen, fast ganz aus dem mathematischen Vortrage ausgeschlossen, und es wird derselbe weder spannend noch anregend. Während nun aber bei Benutzung von Lehrbüchern der zweiten Art der Vortheil gewonnen wird, dass der Schüler im Gefühle einer gewissen Selbstständigkeit mehr Freude an den glücklichen Resultaten seiner Privatstudien hat, dass ferner der Lehrer in den Augen der Schüler immer über dem Buche steht und das überhaupt mehr Leben und Regsamkeit in den Unterricht kommt; so ist es wiederum ein entschiedener Nachtheil, dass dann hiebei die fähigeren Schüler den schwächeren weit voraus eilen, und überdies die fehlerhaften Hefte der letzteren diesen die Repitition erschweren oder wohl gar unmöglich machen. Wo ist nun der Mittelweg, auf welchem diese Klippen vermieden werden? Ich habe einen solchen darin zu finden gehofft, dass ich die schwierigeren Beweise, wo man schon zufrieden sein kann, wenn der Schüler sie reproduciren lernt, ausserdem aber vorzüglich diejenigen, welche gewissermaassen als Normalbeweise für andere dienen können, mit der genauesten Vollständigkeit geführt, bei den übrigen Beweisen aber nur Andeutungen aller hiebei anzuwendenden Sätze gegeben habe, doch in so ausreichendem Maasse, dass die Fähigeren unmittelbar, und die Schwächeren, wenn sie die citirten Paragraphen nachsehen, im Stande sein müssen und sein werden, die Beweise vollständig zu führen, so dass also jeder Schüler nach seinen Kenntnissen Veranlassung zur Selbstthätigkeit findet. Hierbei steht auch der Lehrer in den Augen der Schüler immer höher, als das Buch, da er den von den Schülern mit Umständlichkeit, unnöthigen Zusätzen oder Sprüngen vorgetragenen Beweisen erst diejenige Abrundung

und Eleganz verleiht, welche die Schüler bei der Ausarbeitung in ihren Heften zu erstreben haben, und welche das Compendium bei seiner aphoristischen Behandlungsweise nicht giebt.

Dass ich die Planimetrie in zwei Curse, welche die gewöhnlichen Pensen der beiden unteren mathematischen Klassen enthalten und von denen der zweite*) diesem auf dem Fusse folgen wird, getheilt habe, hat einen doppelten Grund. Zunächst sollte hierdurch die Anschaffung des Buchs, falls es sich Freunde erwerben würde, erleichtert werden, theils aber wollte ich den Hauslehrern, die ihre Schüler doch nur meist für die mittleren Klassen der Gymnasien und Realschulen vorzubereiten haben, durch den ersten Cursus ein billiges und ihren Zwecken dennoch vollkommen entsprechendes Compendium in die Hände geben. Da die hiesige Universitätsstadt der Ausgangspunkt so vieler Hauslehrer ist, so bin ich schon vielfach wegen eines passenden Lehrbuchs der Geometrie von solchen um Rath gefragt worden und ich hoffe nun dadurch den Wünschen dieser mit zu genügen.

Noch habe ich einiges von den gewöhnlichen Behandlungsweisen Abweichendes zu rechtfertigen. Was zunächst das Axiom betrifft, welches ich (§. 49.) der Parallelentheorie an die Spitze stelle:

> „Aendern sich die Richtungen zweier Geraden nicht, so bleibt auch die Abweichung dieser Richtungen unverändert, d. h. sie bilden nach wie vor denselben Winkel."

so scheint es mir vor allen bisher aufgestellten Grundsätzen innere Evidenz zu haben. Wenn ich einen Winkel als „die Abweichung der Richtungen zweier geraden Linien" definire, so geht daraus unbestritten hervor (da von geraden Linien nur in dreierlei Beziehung gesprochen werden kann, nämlich in Bezug auf ihre Lage, ihre Länge und ihre Richtung, und auf die ersteren bei der Definition vom Winkel gar keine Rücksicht genommen wird, dass ein

---

*) Dieser zweite Cursus ist im September desselben Jahres in erster, im Februar 1848 in zweiter und im April 1851 in dritter Auflage erschienen.

Winkel eben nur von der Richtung der Schenkel abhängt. Bleiben also die Richtungen zweier Linien dieselben, so bleibt auch der Winkel, den sie einschliessen, oder die Abweichung dieser Richtungen dieselbe; so dass also unser Grundsatz eigentlich weiter nichts ist, als eine Folgerung aus der Erklärung von Winkeln.*)

Ausser diesem glaube ich noch die Anordnung des geometrischen Lehrstoffs rechtfertigen zu müssen. Dass die Parallelentheorie vor die Lehre von den Dreiecken gehört, scheint mir in der Natur der Sache begründet, wie aus der folgenden einfachen Systematik hervorgeht.

I. Betrachtung einer geraden Linie.

II. Betrachtung zweier geraden Linien.

1) Sie haben verschiedene Richtungen (schneiden einander).
   a. Keine geht über den Durchschnittspunkt hinaus (einfacher Winkel).
   b. Eine geht über den Durchschnittspunkt hinaus (Nebenwinkel).
   c. Beide gehen über den Durchschnittspunkt hinaus (Scheitelwinkel).
2) Sie haben einerlei Richtung (sind parallel).

III. Betrachtung dreier geraden Linien.

1) Sie schneiden einander in einem Punkte. (Giebt nichts Neues).
2) Sie schneiden einander in zwei Punkten (2 Linien sind parallel, die dritte ist Durchschneidende).
3) Sie schneiden einander in drei Punkten (bilden Dreiecke).
4) Sie schneiden einander nicht, sind parallel (giebt ebenfalls nichts Neues).

Die gewöhnliche Umstellung dieser Disciplinen scheint mir deshalb gezwungen und nur durch die verschiedene Behandlung der Parallelentheorien bedingt.

Diesem Grundsatze aber, das Zusammengehörige beisammen zu lassen, bin ich scheinbar selbst untreu geworden, in-

*) Man hat Bedenken getragen, den Begriff des Gleichgerichtetseins in die Parallelen-Theorie einzuführen, während Jedermann ohne Bedenken den Begriff des Verschiedengerichtetseins beim Winkel präsumirt.

dem ich die Kreislehre mehr, als es gewöhnlich geschehen ist, zerstückelt, und so von §. 73. an einige Lehrsätze vom Kreise isolirt vorweggenommen habe, die man gewöhnlich erst später folgen lässt. Dies schien mir aber wegen der folgenden zum unmittelbaren Lehrgange der Planimetrie gehörigen Aufgaben unerlässlich. Die Beweise für die Richtigkeit der Lösungen dieser Aufgaben sind und bleiben ohne jene Lehrsätze mangelhaft. Dies fühlend haben Einige mit diesen Beweisen die jener Lehrsätze gleichsam verschmolzen, was aber, abgesehen von der dadurch entstandenen Weitschweifigkeit, wenigstens unwissenschaftlich ist, wenn jene Lehrsätze mit ihren Beweisen später besonders aufgestellt werden.

Was nun endlich das Quantum des in vorliegendem Compendium dargebotenen Lehrstoffs betrifft, so habe ich nur diejenigen Lehrsätze und Aufgaben angenommen, welche zum strengen Entwicklungsgange gehören, und zwar aus dem Grunde, um keinen Lehrer in die höchst widerwärtige Lage zu bringen, etwas aus dem angeführten Lehrbuche aus Mangel an Zeit wegzulassen. Da ich jedoch manches Interessante nicht ganz unterdrücken wollte, so habe ich das dem strengen Entwickelungsgange Fernerliegende oder die weitere Ausführung des Gegebenen in besondere Anhänge gebracht.*) Bisweilen sind darin sich passend an das Vorhergehende anschliessende Lehrsätze und Aufgaben blos aus andern mathematischen Werken citirt worden. Ich hoffe, man wird das Letztere nicht tadeln.

Halle, d. 21. Juni 1843. **A. Wiegand.**

*) Der Anhang des zweiten Cursus hat bei der dritten Auflage eine gänzliche Umarbeitung erfahren und enthält ein reichliches Material zur Uebung für Schüler.

Vorrede zur vierten Auflage.

Da zwischen der dritten und vierten Auflage nur ein Zeitraum von anderthalb Jahren liegt, so können begreiflicher Weise wesentliche Veränderungen bei der neuen Auflage nicht erwartet werden. Neu hinzugekommen sind eine Anzahl von Holzschnitten, welche geodätische Messapparate darstellen. In Bezug auf die Einrichtung und den Gebrauch derselben habe ich auf meine Schrift: „Der geodätische Messapparat und sein Gebrauch. 2. Aufl. Halle 1848." verwiesen. Die Zugabe wird um so willkommener sein, als sie keine Preiserhöhung nach sich gezogen hat.

Schliesslich kann ich nicht unterlassen, meinem Collegen Herrn Dr. Märker noch meinen herzlichsten Dank zu sagen für die bereitwillige Uebernahme der Correktur. Es ist hierdurch dem Buche ein um so grösserer Dienst geschehen, als Herr Dr. Märker diesen Theil des mathematischen Unterrichts an unserer Schule längere Zeit in der Hand gehabt hat und deshalb die Fehler des Lehrbuchs am besten entdecken konnte.

Halle, d. 1. November 1851.

A. Wiegand.

Inhalt.

Erster Cursus der Planimetrie.

Einleitung.

I. Abschnitt.

Von der geraden Linie, Kreislinie, von Winkeln und Parallellinien.

II. Abschnitt.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen und den Dreiecken, namentlich deren Congruenz im Besondern.

III. Abschnitt.

Von den Vielecken im Allgemeinen und den Parallelogrammen im Besondern.

IV. Abschnitt.

Von den Linien und Winkeln beim Kreise.

Anhang, enth. Materialien zur Uebung für Schüler.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Allgemeine mathematische Vorbegriffe.

§. 1. Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Grössen und hat die Aufgabe, die gegenseitige Abhängigkeit derselben zu untersuchen.

§. 2. Wie jede Wissenschaft, so stützt sich auch die Mathematik auf gewisse Grundwahrheiten, welche an sich klar sind und deshalb nicht bewiesen zu werden brauchen, aber auch nicht bewiesen werden können. Eine solche Grundwahrheit wird ein Grundsatz, *Axioma*, genannt.

§. 3. Ausser diesen Grundsätzen stellt die Mathematik Sätze auf, die nicht an und für sich einleuchtend sind, deren Richtigkeit also durch eine Beweisführung erst dargethan werden muss. Ein solcher Satz heisst ein Lehrsatz, *Theorema*.

Die Art der Beweisführung bei einem Lehrsatze kann im Allgemeinen doppelter Art sein. Entweder geht man von der Voraussetzung aus und kommt durch Schlussfolgerungen auf die Richtigkeit der Behauptung; oder man weist nach, dass die Annahme, das Gegentheil der Behauptung sei richtig, auf etwas Ungereimtes führt. Ein Beweis der ersteren Art heisst ein directer, einer der zweiten ein indirecter oder apagogischer.

§. 4. Oft sind in einem Satze noch ein oder mehre andere Sätze als besondere Fälle enthalten, oder es lassen sich solche Sätze unmittelbar daraus folgern, welche dann, wenn sie wichtig s nd, besonders aufgestellt werden. Ein Satz dieser Art wird dann ein Zusatz

Corollarium, genannt. (Wir haben im Folgenden den Begriff des Zusatzes etwas weiter gefasst und auch solche Sätze noch mit diesem Namen belegt, die aus dem Hauptsatze erst mit Zuziehung einiger andern leichten Sätze folgen, und also auch eine förmliche Beweisführung nöthig machen.)

§. 5. Verschieden von den erwähnten Sätzen ist die Aufgabe, *Problema*, in welcher verlangt wird, dass irgend etwas ausgeführt, und zwar sowohl die Art der Ausführung, die Auflösung, angegeben, als auch die Richtigkeit derselben dargethan werden soll.

Ist die Auflösung für sich einleuchtend, so nennt man die Aufgabe eine Forderung oder einen Forderungssatz, *Postulatum*.

§. 6. Der Begriff der zu behandelnden mathematischen Gegenstände wird bestimmt durch die Erklärung, *Definitio*. Von irgend einem Dinge kann man aber auf doppelte Weise einen deutlichen Begriff geben; entweder dadurch, dass man die wesentlichsten Merkmale desselben angiebt, oder indem man zeigt, wie dasselbe entsteht. Eine Erklärung der ersteren Art heisst Real- oder Sacherklärung, *Definitio realis*, eine Erklärung der zweiten Art dagegen eine genetische Erklärung.

Zweites Kapitel.

Allgemeine mathematische Grundsätze.

§. 7. **Grundsatz.** *Jede Grösse ist sich selbst gleich.* (Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.)

Voraussetzung. A stellt irgend eine Grösse vor.

Behauptung. $A = A$.

§. 8. **Grundsatz.** *Ein Theil von einer Grösse ist kleiner als das Ganze. Der Theil kann also nie gleich dem Ganzen sein.*

(Das Zeichen für die Ungleichheit zweier Grössen ist $<$, an dessen Spitze das Kleinere und an dessen Oeffnung

das Grössere gesetzt wird. Es bedeutet demnach $A < B$, A ist kleiner als B.)

§. 9. **Grundsatz.** *Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.*

Vorauss. $\begin{cases} A = B \\ A = C. \end{cases}$

Behaupt. $B = C$.

§. 10. **Grundsatz.** *a) Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Addition ist $+$ und wird „plus" gelesen).

Vorauss. $\begin{cases} A = B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A + C = B + D$.

b) Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Vorauss. $\begin{cases} A > B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A + C > B + D$.

§. 11. **Grundsatz** *a) Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Subtraction ist — und wird „minus" gelesen.)

Vorauss. $\begin{cases} A = B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A - C = B - D$.

b) Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Vorauss. $\begin{cases} A > B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A - C > B - D$.

§. 12. **Grundsatz.** *Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder ein Punkt und wird „mal" gelesen.)

Vorauss. $\begin{cases} A = B \text{ und} \\ m = n, \text{ wo } m \text{ und } n \text{ unbenannte Zahlen vorstellen.} \end{cases}$

Behaupt. $A \times m = B \times n$.

Anmerk. Bei Buchstaben wird bei der Multiplication in der Regel das Multiplicationszeichen weggelassen, so dass wir in unserm Falle auch schreiben können:

$$Am = Bn.$$

§. 13. **Erklärung.** Eine Grösse durch eine ihr gleichartige messen, heisst eine Zahl finden, welche angiebt, wie vielmal die zweite in der ersten enthalten ist.

(Ob sich immer eine solche Zahl wirklich genau finden lässt oder nicht, ist eine Frage, die erst später beantwortet werden kann.)

§. 13b. **Grundsatz.** *Gleiches durch Gleiches dividirt oder gemessen, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Division ist (:) oder ein Querstrich, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor gesetzt wird. Das Zeichen wird „dividirt durch" gelesen.)

1) Vorauss. $\begin{cases} A = B \text{ und} \\ m = n \end{cases}$ (wo m und n wieder unbenannte Zahlen sind.

Behaupt. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n}$

2) Vorauss. $\begin{cases} A = B \text{ und} \\ C = D \end{cases}$

(wo C und D mit A und B gleichartige Grössen sind).

Behaupt. $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

§. 14. **Grundsatz.** *Wenn von zwei gleichen Grössen die eine grösser oder kleiner als eine dritte ist, so ist auch die andere bezüglich grösser oder kleiner als die dritte.*

Vorauss. $\begin{cases} A = B \text{ und} \\ B > C \text{ oder} \\ B < C; \end{cases}$

Behaupt. $A > C$, im zweiten Falle $A < C$.

Anmerk. In den meisten Compendien findet man noch mehre Grundsätze in Bezug auf Ungleichungen aufgestellt, doch lassen sich alle diese als Lehrsätze erweisen und finden sich in meinem „Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik." Zweite Auflage. Halle, 1850. streng erwiesen oder mit Andeutungen zum Beweise versehen. Wir haben von diesen Sätzen keinen hier aufgeführt, da in

der Geométrie kaum eher von einem derselben Anwendung gemacht werden dürfte, bevor die Schüler dieselben in der Arithmetik gehabt haben.

Drittes Kapitel.

Gegenstand der Geometrie überhaupt.

§. 15. **Erklärung.** Die Grössen, mit welchen es die Mathematik zu thun hat, sind doppelter Art,

1. Zahlgrössen,
2. Raumgrössen.

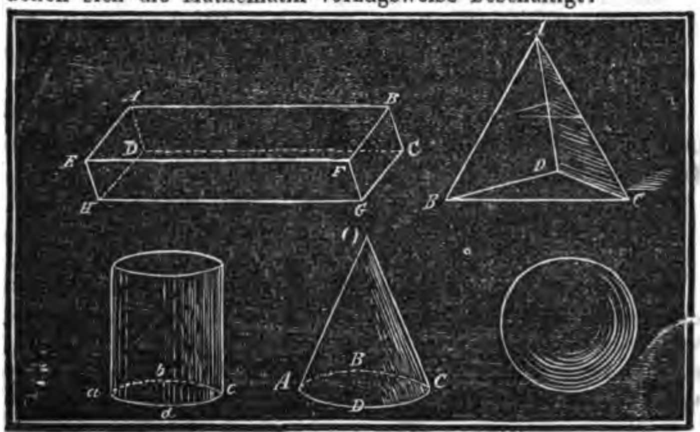
Unter letzteren versteht man die geometrischen Körper, Flächen und Linien.

Der Theil der Mathematik, der es mit ersteren zu thun hat, führt den Namen Arithmetik; mit letzteren dagegen beschäftigt sich die Geometrie.

§. 16. **Erklärung.** Ein geometrischer Körper ist ein nach allen Seiten ausgedehnter und vollständig begrenzter Raum.

Beim geometrischen Körper unterscheidet man von den unendlich vielen Richtungen, nach denen er ausgedehnt ist, 3 Hauptrichtungen, die Länge, Breite und Höhe oder Dicke.

Beistehende Figur zeigt einige derjenigen Körper, mit denen sich die Mathematik vorzugsweise beschäftigt:



ein Parallelepipedon, eine Pyramide, einen Cylinder, einen Kegel, eine Kugel.

Anmerk. Aus der gegebenen Definition geht hervor, dass ein geometrischer Körper nicht in der Wirklichkeit, sondern nur in unserm Bewusstsein existirt. Man gelangt zum Begriffe desselben, wenn man sich von einem gewöhnlichen (physischen) Körper alle Eigenschaften ausser seiner Grösse und Form wegdenkt.

§. 17. **Erklärung.** Die Grenze eines Körpers wird Fläche genannt. Die Fläche ist kein Theil des Körpers und hat deshalb auch nicht drei Ausdehnungen, sondern nur die Ausdehnungen in die Länge und Breite.

§. 18. **Erklärung.** Die Grenzen einer Fläche heissen Linien. Die Linie ist ebenfalls kein Theil der Fläche und hat deshalb von den zwei Ausdehnungen der letztern nur noch die in die Länge. Eine halbbegrenztc Gerade wird ein Strahl, eine begrenzte hingegen eine Strecke genannt.

§. 19. **Erklärung.** Die Grenzen einer Linie heissen Punkte. Ein Punkt ist kein Theil einer Linie und hat somit auch keine Ausdehnung.

Anmerk. Eine Linie kann nicht durch Aneinandersetzung von Punkten gebildet werden, weil eben der Punkt kein Theil der Linie ist; wohl aber kann durch Fortbewegung eines Punktes eine Linie erzeugt werden, und man kann demnach eine Linie auch als den zurückgelegten Weg eines Punktes bezeichnen. In gleicher Weise kann eine Fläche als zurückgelegter Weg einer Linie und ein Körper als zurückgelegter Weg einer Fläche betrachtet werden, während aber ebenso wenig durch Aufeinanderlegen von Flächen ein Körper erzeugt werden kann.

§. 20. **Erklärung.** 1) Eine Linie heisst gerade, wenn alle Theile derselben eine und dieselbe Richtung haben.*)

Es wird dies der Fall sein, wenn die Linie so beschaf-

*) Die Aufsuchung von Punkten, die in einerlei Richtung d. h. also in einer geraden Linie liegen, bezeichnet man mit dem Ausdrucke visiren. Vergl. darüber d. geodät. Messapparat S. 3. Es dürfte nicht ungeeignet sein, schon hier auf die ersten Grundbegriffe des Nivellirens hinzudeuten. Das Nöthige darüber s. angeführte Schrift S. 33—42.

fen ist, dass jeder Theil derselben, irgendwie und irgendwo auf einen andern gelegt, letzteren vollständig deckt. Die Linie wird dann auch die Eigenschaft haben, dass sie bei einer Drehung um zwei auf ihr angenommene feste Punkte keinen Weg im Raume zurücklegt, d. h. keine Fläche beschreibt. Eine gerade Linie wird versinnlicht durch einen ausgespannten Faden, durch ein Bleiloth u. s. w.



2) Krumm dagegen heisst eine Linie, wenn kein Theil derselben gerade ist. Eine krumme Linie wird eine Curve genannt.

Anmerk. Der Begriff Richtung ist in unserm Bewusstsein begründet und lässt keine weitere Definition zu. Aus der Beschaffenheit der geraden Linie geht hervor, dass, wenn sie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, wieder eine gerade Linie, und keine Fläche erzeugt wird, was jedoch bei einer Bewegung in irgend einer andern Richtung immer der Fall ist.

§. 20b. **Zusatz.** *Eine gerade Linie (gewöhnlich auch schlechthin blos Gerade genannt) wird durch jeden auf ihr angenommenen Punkt in zwei Theile getheilt, welche auf entgegengesetzten Seiten des Punkts liegen.*

§. 21. **Erklärung.** 1) Eine Fläche heisst eben oder schlechthin eine Ebene, wenn die geradlinige Verbindung irgend zweier Punkte ihrer ganzen Länge nach in dieselbe fällt, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag.

Es wird dies der Fall sein, wenn die Fläche so beschaffen ist, dass, wenn man sich dieselbe noch einmal denkt und die eine verwendet auf die andere legt, kein hohler Raum zwischen beiden bleibt.

2) Krumm dagegen heisst eine Fläche, wenn kein Theil derselben eben ist.

Die §. 16. befindliche Figur zeigt ausser Ebenen verschiedene krumme Flächen (Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen).

Anmerk. Aus der Beschaffenheit einer Ebene geht hervor, dass, wenn sich diese in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, der zurückgelegte Weg wieder eine Ebene sein wird, dagegen bei einer Bewegung in irgend einer andern Richtung immer ein Körper entsteht.

§. 21[b]. **Zusatz.** *Jede in einer Ebene gezogene Gerade theilt diese in zwei Theile, welche auf entgegengesetzten Seiten dieser Geraden liegen.*

§. 22. **Erklärung.** Von den im Vorhergehenden näher bezeichneten Raumgrössen werden die Körper und diejenigen Flächen- und Linienverbindungen, welche nicht in einer und derselben Ebene liegen, besonders behandelt, und es führt dieser Theil der Geometrie den Namen körperliche Geometrie oder Stereometrie. Der andere Theil dagegen, dessen Gegenstände als in einer und derselben Ebene liegend betrachtet werden, heisst ebene Geometrie oder Planimetrie, auch wohl Epipedometrie.

P l a n i m e t r i e.

Erster Abschnitt.

Von der geraden Linie, Kreislinie, von Winkeln und Parallellinien.

Erstes Kapitel.

Von der geraden Linie im Besondern.

§. 23. **Grundsatz.** *Durch einen Punkt lassen sich unendlich viele gerade Linien legen.*

§. 24. **Lehrsatz.** *Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie aber auch nur eine vollkommen bestimmt, oder durch zwei Punkte lässt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen.*

Beweis. Fielen zwei Gerade, die zwei Punkte mit einander gemein haben, nicht zusammen, so müsste wenigstens die eine bei einer Drehung um diese beiden festen Punkte einen hohlen Raum umschreiben, was §. 20. widerspricht.

Anmerk. Eine gerade Linie wird durch zwei Buchstaben bezeichnet, welche man, wenn sie begrenzt ist, an ihre Endpunkte, wenn sie aber als unbegrenzt gedacht werden soll, an zwei beliebige Punkte derselben setzt. Beim Lesen werden die Buchstaben hinter einander genannt und beim Schreiben nebeneinander gestellt.

§. 24[b]. **Zusätze.** 1) *Alle zwischen zwei Punkten gezogenen geraden Linien fallen zusammen.*

2) *Wenn zwei gerade Linien ein Stück gemein haben, so fallen sie ihrer ganzen Länge nach zusammen.*

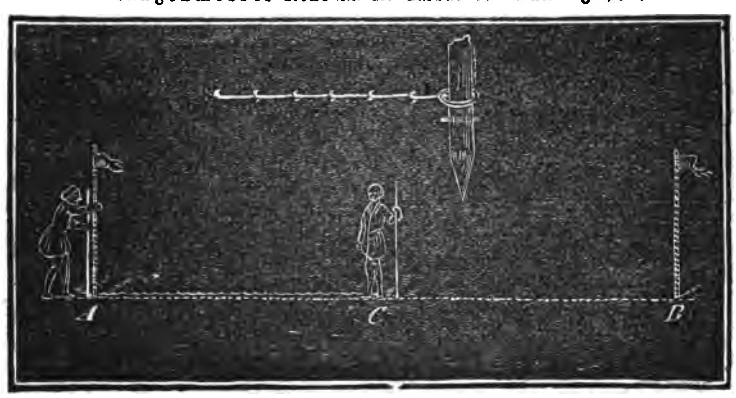
§. 25. **Grundsatz.** *Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. In dieser Beziehung heisst sie dann auch der Abstand der beiden Punkte.*

Anmerk. Der hier als Grundsatz aufgestellte Satz ist noch eines Beweises fähig, welcher auch in §. 69^b. 3. gegeben ist. Will man ihn demnach als Grundsatz nicht gelten lassen, so kann er hier gestrichen und nach §. 69^b. aufgestellt werden, wo dann aber auch §. 57. von seiner Stelle genommen und hinter §. 69^b. gebracht werden müsste. Da §. 25. ausser in §. 57. bis dahin nirgends angewandt worden ist und von §. 57. vor §. 69^b. ebenfalls kein Gebrauch gemacht wird, so würde die logische Ordnung der Sätze hierdurch gar nicht gestört werden.

§. 26. **Forderungssatz.** *Zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen.*

§. 27. **Forderungssatz.** *Eine begrenzte Gerade über einen oder beide Endpunkte hinaus beliebig weit zu verlängern.*

Anmerk. Durch die folgende Figur wird die praktische Ausführung der Linienmessung mittelst der Messkette versinnlicht. Die Messung mit dem Längenmesser siehe im II. Cursus d. Planim. §. 45^b.



Zweites Kapitel.

Von der Kreislinie im Allgemeinen.

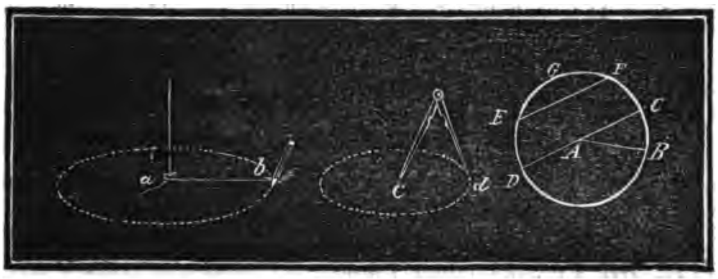
§. 28. **Erklärungen.** 1) Von krummen Linien wird in der Elementar-Geometrie nur eine einzige betrachtet, nämlich die Kreislinie. Dieselbe ist eine in sich zurücklaufende Linie von der Beschaffenheit, dass jeder Punkt derselben von einem innerhalb

liegenden Punkte, dem **Mittelpunkte** (*Centrum*), gleich weit entfernt ist.

Anmerk. Dass die Kreislinie wirklich eine **krumme Linie** ist, d. h. dass kein Theil derselben gerade ist, muss besonders dargethan werden, was aber erst später (§. 73^b. 1.) geschehen kann.

2) Die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche wird ein **Kreis** genannt. (Wo kein Missverständniss zu fürchten ist, wird auch gewöhnlich das Wort **Kreis** für **Kreislinie** gebraucht).

3) Der Abstand eines Punkts der Kreislinie (auch **Kreisperipherie**, **Kreisumfang** genannt) vom Mittelpunkte heisst ein **Halbmesser** (*Radius*) des Kreises.



So sind *ab*, *AB*, *AC*, *AD* Radien.

4) Die Verbindungslinie zweier Punkte der Kreislinie heist eine **Sehne** (*Chorda*), z. B. *EF*.

5) Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne heisst **Durchmesser** (*Diameter*) des Kreises, z. B. *DC*.

6) Ein Stück der Kreisperipherie heisst ein Kreisbogen (*Arcus*), z. B. *EGF*.

§. 28^b. **Zusätze.** 1) *Alle Radien eines Kreises sind unter einander gleich.* (*AB* = *AC* = *AD*.)

2) *Der Abstand jedes Punktes innerhalb der Kreislinie vom Mittelpunkte ist kleiner, jedes Punktes ausserhalb dagegen grösser als der Radius, und umgekehrt: Jenachdem der Abstand eines Punkts vom Mittelpunkte eines Kreises **kleiner**, **ebensogross** oder **grösser** als der Radius ist, jenachdem*

liegt dieser Punkt innerhalb, auf oder ausserhalb der Kreislinie.

3) *Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.*

4) *Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so gross als der Radius.* ($CD = 2AC = 2AD = 2AB$.)

5) *Einen Kreis kann man sich durch Drehung einer begrenzten geraden Linie* (ab) *in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte* (a) *erzeugt denken, wo dann der zurückgelegte Weg dieser Linie der Kreis, der feste Punkt* (a) *der Linie der Mittelpunkt, der zurückgelegte Weg des andern Endpunkts* (b) *die Kreislinie, und die gerade Linie* (ab) *selbst der Radius ist.*

Anmerk. Hierauf gründet sich die Construction einer Kreislinie mit Hülfe des Zirkels. Der gebräuchliche Ausdruck ist dann: Mit gegebener Linie als Radius einen Kreis oder Kreisbogen schlagen. Ebenso gründet sich hierauf das Verfahren, mit Hülfe des Zirkels von einer geraden Linie ein gegebenes Stück abzuschneiden.

Drittes Kapitel.

Von den Winkeln.

§. 29. **Erklärung.** Wenn zwei Linien (*CE*, *BD* Fig. 9.) einen Punkt (*A*) gemeinschaftlich haben, und sich ausserdem bei gehöriger Verlängerung beider Linien auf der einen (*BD*) zwei Punkte (*B* und *D*) angeben lassen, welche auf entgegengesetzten Seiten der andern (*CE*) liegen, so sagt man sie schneiden einander, und der gemeinschaftliche Punkt (*A*) heisst ihr Durchschnittspunkt.

§. 29ᵇ. **Zusatz.** *Zwei einander schneidende Linien haben verschiedene Richtungen.*

Anmerk. Der durch die Anschauung gegebene und nicht weiter zu definirende Begriff „der gleichen Richtung" ist durchaus unverträglich mit dem Durchschneiden zweier Geraden.

§. 30. **Lehrsatz.** *Zwei gerade Linien können einander nur in einem einzigen Punkte schneiden.*

Voraussetzung. Zwei Gerade schneiden einander.

Behauptung. Sie können nur einen einzigen Durchschnittspunkt haben.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz indirect und haben deshalb zu zeigen, dass die Annahme, die Linien schnitten sich in zwei Punkten, auf etwas Ungereimtes d. h. einem früheren Satze oder der gesunden Vernunft Widersprechendes führt. Dies ist in der That der Fall, denn schnitten sich die beiden Linien in zwei Punkten, so müssten nach §. 24[b]. beide Linien zusammenfallen. Es ist aber offenbar ungereimt, dass zwei einander schneidende Gerade zusammenfallen sollten; deshalb ist die obige Behauptung richtig.

§. 31. **Erklärung.** Die Abweichung der Richtungen zweier geraden Linien wird ein Winkel genannt. Der Durchschnittspunkt der beiden Linien wird der Scheitel oder die Spitze und die Linien selber die Schenkel des Winkels genannt. Die Richtungen der Linien werden stets vom Scheitel aus gerechnet.

Man bezeichnet einen Winkel dadurch, dass man an jeden Schenkel und den Scheitel einen Buchstaben setzt. Beim Schreiben wird der Scheitelbuchstabe in die Mitte gestellt und so z. B. der Fig. 1. verzeichnete Winkel *BAC* oder auch *CAB* geschrieben. Beim Lesen werden die Buchstaben in dieser Reihenfolge hintereinander genannt.

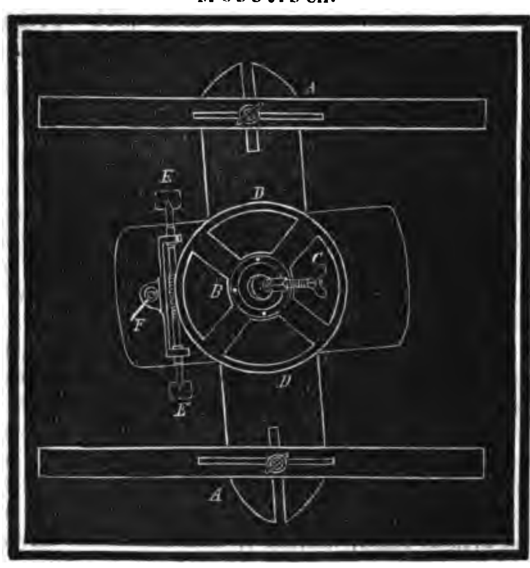
Von dem wahren Sinne des Wortes „Abweichung"*) bekommt man erst dann einen deutlichen Begriff, wenn man sich den Winkel als durch Drehung eines seiner Schenkel, während der andere als festliegend angenommen wird, ent-

*) Wir halten den Ausdruck „Abweichung" für entschieden angemessner, als den gewöhnlich gebrauchten „Neigung." Im erstern liegt der Nebenbegriff der Bewegung von etwas weg, im zweiten dagegen der Bewegung nach etwas hin. Der Entstehungsart des Winkels durch Drehung entspricht aber nur der erstere Begriff. Die v. Münchow'sche Definition: „Winkel zweier geraden an einem Punkte zusammengestellten und einerseits von diesem Punkte begrenzten Linien ist die Grösse derjenigen Drehung, durch welche eine vom Scheitelpunkte begrenzte, andrerseits aber unbegrenzte gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Schenkels zu der Lage des andern stets fortschreitend gelangen kann," können wir, obgleich ein grosser Mathematiker (Jacobi in v. Swinden etc. S. 6.) ihr das Wort redet, noch abgesehen von ihrer Umständlichkeit, nicht für ganz richtig erklären, denn nach derselben erscheint der Winkel als Handlung des Drehens selber, während er doch nur Resultat der Drehung ist.

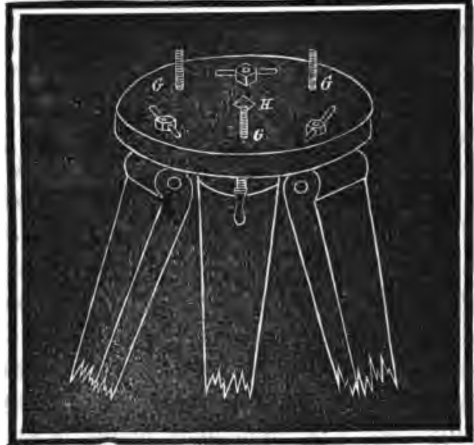
standen denkt. Nehmen wir z. B. an, dass der Schenkel AB (Fig. 1.) vorher auf dem festen Schenkel AC gelegen habe und durch Drehung im Sinne des zwischen die Schenkel gezeichneten Pfeils in seine jetzige Lage gekommen sei, so sieht man leicht, dass bei fortgesetzter Drehung die Richtung des beweglichen Schenkels von der des festliegenden immer mehr abweicht, d. h. dass der Winkel immer grösser wird. Gleichzeitig erkennt man aber auch, dass der Schenkel AB in seine jetzige Lage gekommen sein würde, wenn er von AC aus im Sinne des in der Nähe des Scheitels gezeichneten Pfeils gedreht worden wäre. In diesem Falle würde er einen grössern Weg zu durchlaufen gehabt haben, und die Abweichung von der des festliegenden auch eine weit grössere und also auch der enstandene Winkel ein weit grösserer sein. Der auf die erste Art entstandene Winkel heisst ein concaver, der durch die zweite erhaltene ein convexer Winkel. Wenn im Folgenden von Winkeln ohne weitern Zusatz die Rede ist, so sind immer Winkel der erstern Art gemeint.

Anmerk. Zur Messung der Winkel dienen der Messtisch, die Boussole, der Theodolit. Die beiden ersteren werden durch nachfolgende Figuren versinnlicht.

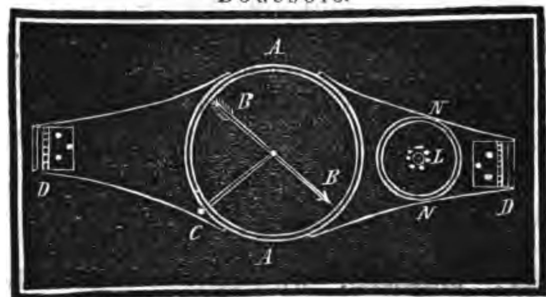

Messtisch.

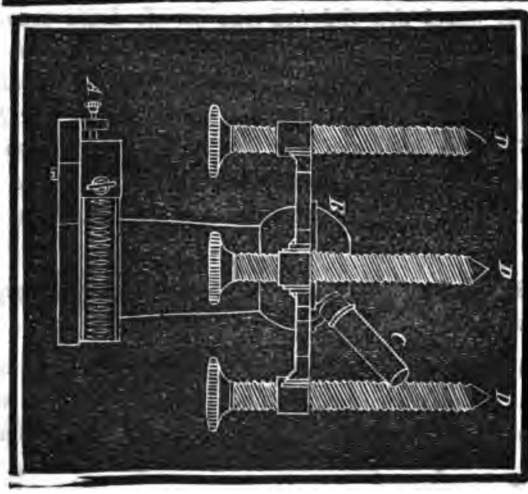


Stativ zum Messtisch.



Boussole.





Stativkopf zur Boussole.

Ueber den Gebrauch dieser Instrumente s. d. geodät. Messapparat etc. p. 12 ff.

§. 31[b]. **Zusätze.** 1) *Aus der vorigen Erklärung geht hervor, dass die Grösse eines Winkels durchaus nicht von der Grösse der Schenkel, sondern lediglich von der Abweichung ihrer Richtungen abhängt.*

2) *Aus dem Bisherigen geht hervor, dass zwei Winkel gleich sind, wenn sie sich so auf einander gelegt denken lassen, dass Scheitel und Schenkel einander decken, vorausgesetzt, dass man beiderseits die concaven oder convexen Winkel meint.*

§. 32. **Erklärungen.** 1) Wenn man zwischen den Schenkeln eines Winkels durch den Scheitel eine oder mehre Gerade zieht, so machen die dadurch entstandenen einzelnen Winkel zusammen offenbar den ursprünglichen aus, und man nennt deshalb letzteren die Summe der einzelnen Winkel.

2) Ist nur eine Linie durch den Scheitel gezogen, so nennt man in gleicher Weise jeden der dadurch entstandenen einfachen Winkel die Differenz zwischen dem ursprünglichen und dem andern neu entstandenen.

Es ist demnach (Fig. 2.)

$$BAD + DAC = BAC \text{ und}$$
$$BAC - BAD = DAC.$$

§. 32[b]. **Zusatz.** *Wird zwischen den Schenkeln eines Winkels durch den Scheitel eine gerade Linie gezogen, so bildet diese mit jedem Schenkel einen kleinern Winkel, als der ursprüngliche ist. Und umgekehrt: Werden zwei Winkel von verschiedener Grösse auf einander gelegt, dass der Scheitel und ein Schenkel des einen auf den Scheitel und einen Schenkel des andern zu liegen kommt, so fällt der andere Schenkel des kleinern Winkels zwischen die Schenkel des andern Winkels.*

§. 33. **Aufgabe.** *Die Summe zweier gegebenen Winkel zu finden.*

Auflösung. Man lege die Winkel (*BAD* und *CAD* Fig. 2.) so an einander, dass sie den Scheitel (*A*) und einen Schenkel (*AD*) gemein haben. Der von den beiden nicht

gemeinschaftlichen Schenkeln (*AB*, *AC*) eingeschlossene Winkel (*BAC*) ist die verlangte Summe.

Beweis. Die Richtigkeit der Lösung folgt aus §. 32. 1.)

§. 34. **Aufgabe.** *Die Differenz zweier gegebenen Winkel zu finden.*

Auflösung. Man lege die Winkel (*BAC* und *DAC* Fig. 2.) so aufeinander, dass sie den Scheitel (*A*) und einen Schenkel (*AB*) gemein haben. Der von den beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkeln (*AD* u. *AC*) eingeschlossene Winkel (*CAD*) ist die verlangte Differenz.

Beweis. Die Richtigkeit der Lösung folgt aus §. 32. 2).

§. 35. **Erklärungen.** 1) Man kann durch Drehung des einen Schenkels eines Winkels die Schenkel einander so weit nähern, dass sie beide endlich zusammenfallen. Man sagt in diesem Falle, der von den Linien gebildete Winkel sei „Null." Der zum Nullwinkel gehörige convexe Winkel heisst ein voller Winkel.

2) Wenn die Schenkel eines Winkels ohne zusammenzufallen eine gerade Linie bilden, so heisst der Winkel ein gestreckter. (Fig. 3.)

Es ist leicht ersichtlich, dass der concave und der convexe Winkel beim Gestreckten gleich sind, woraus also folgt, dass der Gestreckte die Grenze zwischen jenen beiden Winkelarten bildet.

§. 35^b. **Zusätze.** 1) *Der Nullwinkel, der volle und gestreckte Winkel sind die einzigen Winkel, deren Schenkel einander nicht schneiden können, sondern in eine einzige Gerade fallen.*

2) *Mit Rücksicht auf* §. 31. *kann man auch sagen: haben die Schenkel eines Winkels einerlei Richtung, so ist der Winkel ein Nullwinkel oder ein voller Winkel, haben dagegen, die Schenkel entgegengesetzte Richtungen, so ist der Winkel ein gestreckter.*

§. 36. **Lehrsatz.** *Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.* (*Fig.* 3.)

Voraussetzung. *BAC* und *EDF* sind gestreckte Winkel.

Behaupt. $BAC = EDF$.

Beweis. Da die Schenkel beider Winkel gerade Linien bilden und gerade Linien jeder Zeit zur Deckung (§. 24[b]. 1.) gebracht werden können. so sind (§. 31[b]. 2.) die Winkel einander gleich, weil es in diesem Falle einerlei ist, in welchem Sinne die Winkel als entstanden gedacht werden.

§. 37. **Erklärung.** Wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entsteht ein neuer Winkel, welcher der Nebenwinkel des ursprünglichen genannt wird. Nebenwinkel sind demnach solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel eine gerade Linie bilden.

So sind (Fig. 4.) BAC und DAC Nebenwinkel zu einander.

§. 38. **Lehrsatz.** *Die Summe zweier Nebenwinkel ist jederzeit gleich einem gestreckten Winkel.*

Vorauss. BAC und CAD sind Nebenwinkel.

Behaupt. $BAC + CAD = BAD$, (Fig. 4.)

Beweis. Folgt unmittelbar aus §. 32.

§. 38[b]. **Zusätze.** 1) *Alle Nebenwinkelpaare sind unter sich gleich.*

$BAF + FAG = BAE + EAG = BAD + DAG$
$= BAC + CAG$. (Fig. 6.)

2) *Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.*

§. 39. **Erklärung.** Sind zwei Nebenwinkel (Fig. 5.) einander gleich, so heisst jeder ein rechter Winkel oder schlechthin ein Rechter. Von den Schenkeln eines rechten Winkels sagt man, dass jeder auf dem andern senkrecht (lothrecht, perpendiculär) stehe und nennt jeden Schenkel in Bezug auf den andern ein Loth (Perpendikel, eine Senkrechte).

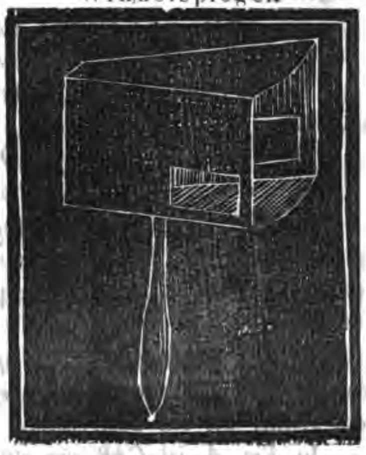
(Das Zeichen der Perpendikularität ist ($\perp$) und man schreibt $AB \perp CD$ oder auch $CD \perp AB$. Einen rechten Winkel bezeichnet man durch R.)

Anmerk. Zur Absteckung rechter Winkel im Felde bedient man sich der Kreuzscheibe, des Winkelspiegels,

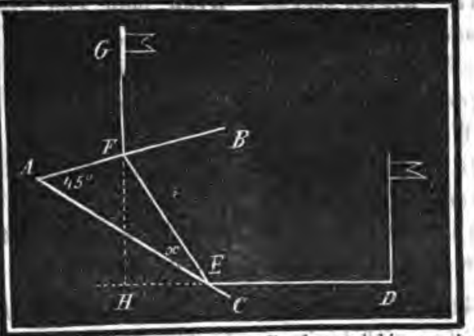
Kreuzscheibe.



Winkelspiegel.

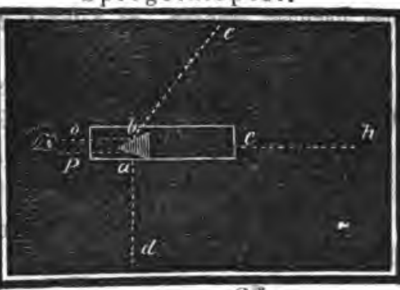


welches letzteren Theorie aus nachfolgender Figur deutlich wird, ferner des



Spiegeldiopters, welcher ebenfalls zur Absteckung eines Winkles von 45° gebraucht werden kann. (Ueber die Einrichtung und den Gebrauch dieser Instrumente findet sich das Weitere in meiner Schrift: Der geodät. Messapparat, S. 7—10 und 23 bis 24.)


Spiegeldiopter.



§. 39[b]. **Zusätze.** 1) *Ein rechter Winkel ist die Hälfte von einem gestreckten, oder ein Gestreckter ist gleich zwei Rechten.*

$BAC = \frac{1}{2} CAD$ und $BAD = \frac{1}{2} CAD$. (Fig. 5.)

2) *Alle rechten Winkel sind unter einander gleich.*

3) *Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.* (*Fig.* 4.)

$$CAB + CAD = 2R.$$

Beweis. Folgt aus 1.) mit Zuziehung von §. 38.

§. 40. **Erklärung.** Sind zwei Nebenwinkel ungleich, so heissen sie schiefe Winkel, ausserdem wird der kleinere ein spitzer, der grössere ein stumpfer genannt.

§. 40[b]. **Zusatz.** *Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein Rechter, ein stumpfer hingegen grösser als ein Rechter, doch kleiner als ein Gestreckter.*

In Fig. 4. ist *CAB* ein stumpfer und *CAD* ein spitzer Winkel.

§. 41. **Lehrsatz.** *Wenn man von einem Punkte einer geraden Linie, der nicht ihr Endpunkt ist, auf einer Seite derselben beliebig viele Gerade zieht, so ist die Summe aller einfachen Winkel gleich zwei Rechten oder einem gestreckten Winkel.* (*Fig.* 6.)

Vorauss. *AC, AD, AE, AF,* sind durch *A* auf einerlei Seite von *BG* gezogen.

Behaupt. $BAC + CAD + DAE + EAF + FAG = 2R.$

Beweis. Folgt aus §. 32. und §. 39[b]. 1.)

§. 41[b]. **Zusatz.** *Wenn von einem Punkte in einer Ebene beliebig viel Linien nach den verschiedensten Richtungen gezogen werden, so beträgt die Summe aller einfachen Winkel* 4 *R.* (*Fig.* 7.)

Vorauss. *AB, AC, AD,* etc. sind Linien, die in einer Ebene liegen und von einem Punkt ausgehen.

Behaupt. $BAC + CAD + DAE + EAF + FAG + GAB = 4$ R.

Beweis. Man verlängere eine dieser Linien z. B. *AD* über den Punkt *A* hinaus bis *H*, dann folgt die Richtigkeit



des Satzes unmittelbar aus dem Hauptsatze, wenn §. 32. zu Hülfe gezogen wird.

Anmerk. Ausser den in Fig. 6. und 7. aufgeführten Winkeln kommen noch viele andere Winkel vor, welche Summen jener einfachen Winkel sind. Ihre Aufführung bleibe dem Anfänger überlassen.

§. 42. **Lehrsatz.** *Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, die nicht gemeinschaftlichen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen liegen, und die Summe beider Winkel* $= 2$ *R. ist; so bilden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine gerade Linie.* (*Fig.* 8.)

Vorauss. $BAC + BAD = 2\,R.$

Behaupt. CA und AD liegen in gerader Linie.

Beweis. Gesetzt CA und AD lägen nicht in gerader Linie, so könnte man CA bis E verlängern und erhielte demnach nach §. 38.

$$BAC + BAE = BAC + BAD$$

und nach Anwendung von §. 11. a.

$$BAD = BAE.$$

was nach §. 8. ungereimt ist. Folglich ist die Annahme falsch, dass AD nicht mit AE zusammenfiele.*)

§. 43. **Erklärung.** Wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so erhält man 4 Winkel, von denen je zwei gegenüberliegende Scheitelwinkel heissen. Scheitelwinkel sind demnach solche Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern über den Scheitel hinaus sind.

In Fig. 9. sind BAC und EAD und ebenso CAD und EAB Scheitelwinkelpaare.

§. 44. **Lehrsatz.** *Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.* (*Fig.* 9.)

---

*) Man kann auch so schliessen: Da $CAB + BAD = CAD = 2\,R$, oder gleich einem Gestreckten ist, so müssen die Schenkel des Winkels ACD eine gerade Linie bilden.

BAC, EAD sind Scheitelwinkel.
BAC = EAD.
Es ist
+ CAD = EAD + CAD
aus nach Anwendung von §. 11. a. die
Hauptung folgt.

Viertes Kapitel.

Von Parallellinien.

§. 45. **Erklärung.** Von zwei Linien, welche ohne zusammenzufallen nach beiden Seiten eine und dieselbe Richtung haben, sagt man, sie seien gleichlaufend oder parallel. (Fig. 10.)

Das Zeichen der Parallelität ist (||) und man schreibt $AB \parallel CD$. Beistehende Figur veranschaulicht eine Anwendung der Parallelität zweier geraden Linien.

Anmerk. Man könnte hier fragen, was es denn eigentlich heisse, „zwei Linien haben einerlei Richtung;" doch hierauf können wir nur antworten, dass das „Gleichgerichtetsein" zweier Geraden eine blosse Anschauung ist, die begreifen zu wollen eben so thöricht sein würde, als das Verlangen einen Begriff anzuschauen.

§. 45ᵇ. **Zusätze.** 1) *Da man von einem Punkte nach allen möglichen Richtungen gerade Linien ziehen kann, es muss sich auch durch einen Punkt ausserhalb einer Linie eine zweite ziehen lassen, welche mit der ersteren dieselbe Richtung hat, d. h. die ihr parallel ist.* Wie eine solche Linie zu ziehen ist, wird §. 50. und §. 78. gezeigt.

2) *Parallele Linien bilden mit einander einen Nullwinkel. Sie schneiden einander niemals und nirgends, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag. Man kann deshalb auch sagen: der Scheitel dieses Nullwinkels liegt in unendlicher Entfernung.*

Ein Winkel ist nämlich (§. 31.) die Abweichung der Richtungen zweier Geraden. Da nun parallele Linien einerlei, also keine abweichenden Richtungen haben, so ist eben deren Abweichung Null, also auch der von ihnen gebildete Winkel ein Nullwinkel. Daraus folgt aber zugleich, dass parallele Linien einander in der Endlichkeit (d. h. wirklich) nicht schneiden können, denn dann müssten sie ja, um einen Nullwinkel bilden zu können, zusammenfallen (§. 35[b].)

Anmerk. In der Wirklichkeit scheint es, als ob der vorige Satz nicht wahr wäre. Denn sieht z. B. ein Auge längs einer Pappelallee auf beiden Seiten einer Landstrasse, so scheinen sich die beiden Baumreihen in der Ferne immer mehr und mehr zu nähern. Es ist dies Folge von der verschiedenen Grösse der Gesichtswinkel.

Umgekehrt, wenn zwei nicht zusammenfallende Gerade, so viel man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag, niemals zum Durchschnitt kommen, so können sie auch keinen Winkel mit einander bilden; sie bilden also mit einander den Winkel Null, haben also keine abweichende, sondern einerlei Richtung, sind mithin parallel. Wir können also den vorigen Satz auch umkehren und sagen:

3) „*Wenn zwei gerade Linien, so weit man sie auch verlängern mag, doch nie zum Durchschnitt kommen, so sind sie parallel.*

§. 46. **Grundsatz.** *Aendern sich die Richtungen zweier Geraden nicht, so bleiben auch die Abweichungen dieser Richtungen ungeändert, d. h. sie bilden nach wie vor denselben Winkel.*

Erläuterung. Denken wir uns (Fig. 11.) die Lage der beiden Geraden AB und AC in der Weise verändert, dass AB in die Lage $A'B'$ und AC in die Lage $A'C'$ gekommen sei, so ist die Abweichung der Richtungen der Linien $A'B'$ und $A'C'$ dieselbe, wie die der Richtungen AB und AC, wenn die Linien AB und AC bei der Fortbewegung nach $A'C'$ und $B'D'$ bezüglich ihre Richtungen nicht geändert haben.

Da aber der Winkel, welchen zwei Linien einschliessen, die Abweichung der Richtungen dieser Linien ist, so schliessen die beiden schneidenden Linien in ihrer neuen Lage $A'B'$ und $A'C'$ denselben Winkel ein, als in der ursprünglichen

AB und *AC*, vorausgesetzt nämlich, dass man die Winkel meint, welche in einem und demselben Sinne (s. §. 31.) durch Drehung entstanden gedacht werden können.

Anmerk. Wir können uns von der Evidenz dieses Satzes auch durch eine indirecte Betrachtungsweise leicht überzeugen. Gesetzt die Winkel änderten sich, so würde dies heissen (nach der Definition vom Winkel) die Abweichungen der Richtungen änderten sich. Eine Aenderung der Abweichung der Richtungen würde aber offenbar eine Aenderung der Richtungen sein, ebenso wie ein Kleid ein verändertes wird, wenn z. B. dessen Farbe sich ändert.

§. 47. **Erklärung.** 1) Wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden, so entstehen überhaupt acht Winkel, von denen die zwischen den durchschnittenen Linien liegenden innere, die ausserhalb derselben liegenden äussere heissen. Ausserdem nennt man

2) je zwei Winkel, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten auf einerlei Seite der durchschneidenden Linie liegen, und von denen der eine ein äusserer, der andere ein innerer ist, correspondirende oder Gegenwinkel. Endlich heissen

3) je zwei innere oder äussere Winkel, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten und verschiedenen Seiten der durchschneidenden Linie liegen, Wechselwinkel.

In Fig. 12. sind *ABC* und *BEF*, *ABD* und *BEG*, *CBE* und *FEH*, *DBE* und *GEH* correspondirende und *DBE* und *BEF*, *CBE* und *BEG* innere, hingegen *ABC* und *GEH*, *ABD* und *FEH* äussere Wechselwinkel.

§. 48. **Lehrsatz.** *Wenn zwei parallele Linien von einer dritten durchschnitten werden, so sind:*

1) *je zwei correspondirende,*

2) *je zwei Wechselwinkel einander gleich, und*

3) *es beträgt die Summe je zweier innern Winkel auf einerlei Seite der Durchschneidenden zwei Rechte.* (*Fig.* 12.)

1) Voraussetzung. $DC \parallel GF$.

Behauptung. $ABC = BEF$.

Beweis. Es ist zunächst klar, dass die beiden Winkel bei *ABC* und *BEF* als in einem und demselben Sinne (s. §. 31.)

entstanden gedacht werden können, nämlich nach unserer Figur durch Drehung der parallelen Schenkel *BC* und *EF* von der Durchschneidenden *AH* aus im Sinne von links nach rechts. Nun liegen aber ferner die Schenkel *AB* und *BE* auf der Durchschneidenden, also in einer und derselben Geraden, und haben demnach eine und dieselbe Richtung. In gleicher Weise haben aber auch die Schenkel *AC* und *EF* als parallele Linien eine und dieselbe Richtung, folglich muss auch die Abweichung der Richtungen der Schenkel *AB* und *BC* der Abweichung der Richtungen der Schenkel *BE* und *EF* (nach §. 46.) gleich, d. h. *ABC* und *BEF*, da sie, wie wir oben gesehen, in einerlei Sinne entstanden gedacht werden können, selbst gleich sein, w. z. b. w.

2) Voraussetzung. $DC \parallel GF$.

Behauptung. $DBE = BEF$.

Beweis. Nach 1. ist $ABC = BEF$, woraus mit Anwendung von §. 44. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

3) Voraussetzung. $DC \parallel GF$.

Behauptung. $CBE + BEF = 2R$.

Beweis. Es ist $ABC + CBE = 2R.$, woraus mit Zuziehung von 1. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 48[b]. **Zusatz.** *Sind die Schenkel zweier Winkel bezüglich einander parallel, so sind die Winkel entweder gleich oder Nebenwinkel zu einander.*

§. 49. **Lehrsatz.** *Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es sind*

1) *ein paar correspondirende, oder*

2) *ein paar Wechsel-Winkel einander gleich, oder endlich es beträgt*

3) *die Summe zweier innern Winkel auf einerlei Seite der Durchschneidenden* 2R,

so sind die durchschnittenen Linien parallel. (*Fig.* 13.)

1) Voraussetzung. $ABC = BEF$.

Behauptung. $BC \parallel EF$.

Beweis. Gesetzt *BC* wäre nicht $\parallel$ *EF*, so müsste sich durch den Punkt *B* (s. §. 45[b]. 1.) eine Parallele mit *EF* ziehen lassen; diese möge *BC'* sein. Hieraus würde (nach §. 48.) folgen, dass $ABC' = BEF$ und also auch $ABC' = ABC$ wäre,

was (nach §. 8.) ungereimt ist, es möchte nun BC' zwischen die Schenkel des Winkels ABC oder ausserhalb derselben fallen. Es ist demnach die Angabe falsch, dass BC' eine von BC verschiedene Linie wäre.

2) Voraussetzung. $DBE = BEF$.

Behauptung. $DC \parallel EF$.

Beweis. Folgt aus 1. nach Anwendung von §. 44.

3) Voraussetzung. $CBE + BEF = 2R$.

Behauptung. $BC \parallel EF$.

Beweis. Es ist $ABC + CBE = 2R$; dies führt, zusammengehalten mit §. 9. und 11. a., auf $ABC = BEF$, woraus die Richtigkeit der Behauptung nach 1. folgt.

§. 49[b]. **Zusatz.** *Wenn zwei Linien auf einer und derselben dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.*

§. 50. **Aufgabe.** *Durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer Geraden mit dieser auf mechanische Weise eine Parallele zu ziehen.* (*Fig.* 14.)

Auflösung. Man lege einen Winkelhaken*) so an die gegebene Linie AB, dass eine seiner Kanten mit der Linie genau zusammenfällt. Hierauf lege man ein genaues Lineal an eine der beiden übrigen Kanten, halte das Lineal fest und schiebe den Winkelhaken an dem Lineale so weit fort, bis die Kante, welche vorher an die Linie AB gelegt wurde, auf den Punkt M zu liegen kommt. Nun ziehe man längs dieser Kante eine Linie CD. Diese ist die verlangte Parallele.

Das angegebene Verfahren stützt sich auf §. 49. 1.

§. 51. **Lehrsatz.** *Wenn zwei Linien einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel.* (*Fig.* 15.)

Voraussetzung. $CD \parallel GH$
$CD \parallel EF$

Behauptung. $EF \parallel GH$.

Beweis. Da 3 gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, im Allgemeinen nur 3 Richtungen angeben können, so muss jede vierte Linie, die eine von den 3 Richtungen ver-

---

*) Man versteht darunter ein rechtwinkliges Dreieck von Holz, Messing, etc.

schiedene Richtung hat, jede der 3 Linien schneiden. Sei nun AB eine solche Linie, welche die 3 gegebenen bezüglich in I, K und L schneidet, so folgt aus der ersten Voraussetzung, dass $x = z$ und aus der zweiten, dass $x = y$ (§. 48. 1.) ist, woraus $y = z$ und somit $EF \parallel GH$ (nach §. 49. 1.) folgt, w. z. b. w.

(Die Richtigkeit des Satzes folgt eigentlich schon aus der Definition paralleler Linien.)

§. 52. **Zusatz.** *Wenn eine gerade Linie die eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie bei gehöriger Verlängerung auch die andere.* (*Fig.* 16.)

Voraussetzung. $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ FG \text{ schneidet } CD. \end{cases}$

Behauptung. FG schneidet auch AB.

Beweis. Schnitte die Gerade FG die eine Parallele CD in E, die andere AB aber nicht, so müsste $FG \parallel AB$ sein (nach §. 45^b. 3.), was nach vorigem §., da $CD \parallel AB$ nach Voraussetzung, auf die Ungereimtheit führen würde, dass $CD \parallel FG$ wäre.

(Die Richtigkeit dieses Satzes folgt eigentlich schon aus dem Beweise des vorigen.)

Zweiter Abschnitt.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen und den Dreiecken, namentlich deren Congruenz im Besondern.

Erstes Kapitel.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen.

§. 53. **Erklärungen.** 1) Eine von allen Seiten begrenzte Ebene wird eine ebene Figur genannt.

2) Die ganze Grenze einer ebenen Figur heisst ihr Umfang *(Perimeter)*.

3) Wird eine ebene Figur von geraden Linien (wo „drei" die geringste Anzahl ist, da zwei gerade Linien keinen Flächenraum einschliessen können), eingeschlossen, so nennt man die Figur eine geradlinige, und jede der Linien eine Seite derselben. Ist sie von einer oder mehren krummen Linien eingeschlossen, so heisst sie krummlinig, und ist sie endlich von geraden und krummen Linien eingeschlossen, so wird sie gemischtlinig genannt.

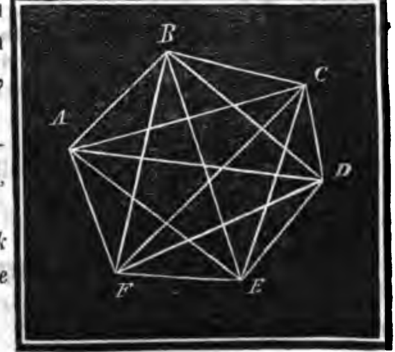
§. 54. **Erklärung.** Jenachdem eine ebene Figur von 3, 4, 5, n Seiten begrenzt wird, wird sie ein Dreieck, Viereck, Fünfeck und allgemein n-eck (Vieleck, *Polygon*) genannt.

Zusatz. Jedes Vieleck enthält ebensoviel Winkel und also auch Winkelspitzen oder sogenannte Eckpunkte, als Seiten. Denn da jede Seite mit der darauf folgenden und die letzte wieder mit der ersten einen Winkel bildet, so muss die Zahl der Winkel der der Seiten gleich sein.

§. 54[b]. **Erklärungen.** 1) Sind die Seiten und Winkel eines Vielecks unter sich bezüglich gleich, so wird es ein reguläres Vieleck genannt.

2) Kommen in einem Vielecke ein oder mehre convexe Winkel vor (Fig. 17.), so nennt man es ein Vieleck mit einspringenden Winkeln.

§. 55. **Erklärung.** Eine gerade Linie, welche, ohne eine Seite zu sein, zwei Winkelspitzen eines Vielecks verbindet, heisst eine Diagonale.



So sind in nebenstehender Figur AC, AD, AE, BD, BE, BF u. s. w. Diagonalen.

Zusatz. Im Dreieck lässt sich keine Diagonale ziehen.

Zweites Kapitel.

Von den Dreiecken.

§. 56. **Erklärungen.** 1) Sind in einem Dreiecke die drei Seiten einander gleich, so heisst es ein gleichseitiges.

2) Sind in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so heisst es ein gleichschenkliges. Die gleichen Seiten heissen in diesem Falle die Schenkel, ihr Zusammenstossungspunkt die Spitze und die dritte Seite vorzugsweise die Grundlinie (*Basis*) des Dreiecks.

3) Sind alle Seiten eines Dreiecks ungleich, so heisst es ein ungleichseitiges.

4) In einem Dreiecke heisst ein aus einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung gefälltes Loth eine Höhe, und in Bezug darauf die Seite, auf welcher sie senkrecht steht, die Grundlinie des Dreiecks.

§. 57. **Lehrsätze.** 1) *In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.*

2) *In jedem Dreiecke ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.* (*Fig.* 19.)

Beweis. 1) Folgt unmittelbar aus §. 25. (Vergl. §. 69[b].) 2) Folgt aus 1.) mit Anwendung von §. 11. b.

§. 58. **Erklärung.** Wenn man eine Seite des Dreiecks verlängert, so entsteht ein neuer Winkel, welcher Aussenwinkel des Dreiecks heisst.

§. 59. **Lehrsatz.** *Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind.* (*Fig.* 18.)

Voraussetzung. *BCD* ist Aussenwinkel des Dreiecks *ABC*.

Behauptung. $BCD = ABC + BAC$.

Beweis. Nach §. 45[b]. 1. muss es eine gerade Linie geben, welche durch *C* geht und $\parallel$ *AB* ist. Diese Parallele zu *AB* muss auch offenbar zwischen den Schenkeln des Aussenwinkels liegen, denn läge sie zwischen den Schenkeln *AC* und

BC, so müsste sie mit AB zum Durchschnitt kommen. Sei nun CE diese Parallele, so theilt sie den Winkel BCD in zwei Stücke BCE und ECD, wovon $BCE = ABC$ als Wechselwinkel, und $ECD = BAC$ als correspondirende Winkel sind. Wendet man noch §. 10. a. an, so folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar.

§. 59[b]. **Zusatz.** *Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist immer grösser als einer der beiden Dreieckswinkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.*

Behaupt. $BCD > ABC$ und auch $BCD > BAC$.

§. 60. **Lehrsatz.** *Die Summe aller drei Winkel im Dreieck ist gleich zwei Rechten.* (Fig. 18.)

Voraussetzung. ABC, BCA, CAB sind Winkel in einem Dreiecke.

Behauptung. $ABC + BCA + CAB = 2R$.

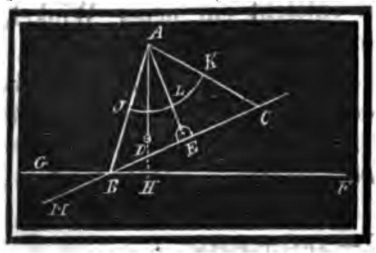
Beweis. Es ist $BCD + BCA = 2R$ (§. 39[b]. 3.), woraus mit Zuziehung von § 59. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 60[b]. **Zusätze.** 1) *In einem Dreiecke kann nur ein rechter und ebenso nur ein stumpfer Winkel, wohl aber können drei spitze vorkommen.*

2) *Sind in einem Dreiecke zwei Winkel oder auch nur ihre Summe bekannt, so ist es auch die Summe der beiden andern.*

3) *Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel bezüglich einander gleich, so sind es auch die dritten.*

Auf den letzten dieser Zusätze gründet sich folgender praktische Satz:



„Der Elevationswinkel einer gegen den Horizont geneigten Geraden ist gleich dem Winkel, welchen das Bleiloth einer auf die Gerade aufgesetzten Setzwage mit dem Höheneinschnitte der letzteren bildet.

§. 61. **Erklärung.** Rechtwinklig heisst ein Dreieck, wenn es einen rechten, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen und spitzwinklig, wenn es 3 spitze Winkel enthält. Im rechtwinkligen Dreiecke

heissen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten Katheten, und die dritte Hypotenuse.

Zusatz. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der beiden spitzen Winkel auch = R, *im stumpfwinkligen* < R, *und im spitzwinkligen ist die Summe zweier Winkel* > R.

Drittes Kapitel.

Von der Congruenz der Figuren, insbesondere der Dreiecke.

§. 62. **Erklärung.** Ebene Figuren heissen congruent, wenn sie sich so auf einander gelegt denken lassen, dass sie in allen Punkten ihrer Grenze zusammenfallen oder einander decken. (Das Zeichen der Congruenz ist ≅.)

Zusatz. Congruente Figuren haben jederzeit gleichen Flächeninhalt und es sind in denselben die gleichliegenden (homologen) Seiten und Winkel einander gleich.

Anmerk. Obgleich die Congruenz zweier Figuren den gleichen Flächeninhalt derselben bedingt, so kann jedoch umgekehrt von dem gleichen Flächeninhalte zweier Figuren nicht auf ihre Congruenz geschlossen werden. Will man den Begriff der Congruenz noch auf gerade Linien und Winkel ausdehnen, so hat man es hier allerdings mit Gegenständen zu thun, bei denen der Schluss rückwärts ebenfalls gemacht werden kann, denn gleiche gerade Linien und gleiche Winkel können immer zur Deckung gebracht werden. Bei krummen Linien dagegen ist es nicht mehr der Fall.

§. 63. I. **Congruenzsatz.** *Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten des einen bezüglich zweien Seiten des andern und ausserdem die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich sind.* (*Fig.* 19.)

Vorauss. $AB = DE$

$AC = DF$

$BAC = EDF$

Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege das eine Dreieck ABC so auf das andre DEF, dass

1. der Scheitel des gegebenen Winkels A auf den Scheitel des ihm gleichen D,

2. die eine gegebene Seite AB auf die ihr gleiche DE falle, und

3. beide Dreiecke auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen. Dann folgt hieraus;

1. dass B auf E fällt, da $AB = DE$, und A auf D liegt:

2. dass AC auf DF fällt, weil $BAC = EDF$ ist, AB auf DE und die Winkel auf einander liegen (§. 62. Anmerk.);

3. dass C auf F fällt, da $AC = DF$, und A auf D liegt; und endlich

4. dass BC auf EF fällt, da die Endpunkte, B auf E und C auf F, auf einander liegen (§. 24[b]. 1.). Somit decken die Dreiecke einander in allen Punkten und sind deshalb congruent.

Folgerungen für die nicht gegebenen Stücke der Dreiecke. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke folgt nun:

1. dass $BC = EF$, da diese den gleichen Winkeln BAC und EDC gegenüberliegen;

2. dass $ABC = DEF$, da diese den gleichen Seiten AC und DF gegenüberliegen; und

3. dass $BCA = EFD$, da diese die gleichen Gegenseiten AB und DE haben.

Ebenso sind die zu gleichen Seiten gehörigen Höhen, die Halbirungslinien gleicher Winkel etc. einander gleich.

Anmerk. Die hier geschehene Zergliederung der Aufeinanderlegungs-Operationen, der Folgerungen für das Aufeinanderfallen der übrigen Dreiecksstücke und der Folgerungen für die Gleichheit der nicht gegebenen Stücke soll dem Anfänger als Norm dienen, nach welcher er die Beweise der übrigen Congruenzsätze auszuführen hat.

§. 64. II. **Congruenzsatz.** *Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die daran liegenden Winkel des einen bezüglich einer Seite und den daran liegenden Winkeln des andern gleich sind.* (*Fig.* 19.)

Vorauss. $AB = DE$
$ABC = DEF$
$BAC = EDF$

Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Die Dreiecke werden so aufeinander gelegt, dass die Scheitel zweier gleichen gegebenen Winkel und die gleichen Seiten zusammenfallen und die Dreiecke wieder auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen. Hierauf wird das Aufeinanderfallen der andern Endpunkte der gleichen Seiten, der andern Schenkel der gegebenen Winkel und endlich der dritten Winkelspitzen gefolgert. Letzteres folgt daraus, dass: wenn zwei Linien auf zwei andere fallen, auch ihre Durchschnittspunkte zusammenfallen müssen, weil zwei gerade Linien einander nur in einem Punkte schneiden können.

Folgerungen. $BC = EF$, $AC = DF$, $BCA = EFD$.

§. 64[b]. **Zusatz.** *Ist statt eines anliegenden Winkels der Gegenwinkel der gleichen Seite gegeben, so sind die Dreiecke ebenfalls congruent.*

Beweis. Folgt aus §. 64. mit Zuziehung von §. 60[b]. 3.

§. 65. **Lehrsatz.** *Sind in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel einander gleich, oder:*

In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (*Fig.* 20.)

Vorauss. $AB = AC$.

Behaupt. $ACB = ABC$.

Beweis. Man schneide von den gleichen Seiten AB und AC von A aus beliebige aber gleiche Stücke ab, $AD = AE$, und verbinde die Abtragungspunkte, D und E, mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen. Dann ist $\triangle AEB \cong \triangle ADC$ nach §. 63. Hieraus folgt $ADC = AEB$ und folglich auch $BDC = CEB$ (§. 38[b]. 2.), ferner $DC = EB$, und es ist deshalb, da auch $DB = EC$, $\triangle BCD \cong \triangle CEB$, woraus $ACB = ABC$ folgt, w. z. b. w.

§. 65[b]. **Zusatz.** *In jedem gleichseitigen Dreiecke sind auch die drei Winkel gleich und jeder gleich* $^2/_3$ R.

§. 66. **Lehrsatz.** *Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind es auch ihre Gegenseiten, oder dann ist das Dreieck ein gleichschenkliges.* (*Fig.* 20.)

Vorauss. $ACB = ABC$.

Behaupt. $AB = AC$.

Beweis. Man schneide auf den als gleich zu erweisenden Seiten *AB* und *AC* von den Scheiteln der gleichen Winkel *B* und *C* aus beliebige, aber gleiche Stücke, *BD* = *CE*, ab und verbinde wieder *D* mit *C* und *E* mit *B*. Dann ist △*DBC* ≅ △*EBC* nach §. 63. Diese Congruenz liefert die noch fehlenden gleichen Stücke zur Congruenz der obern Dreiecke *ADC* und *AEB*, die aus §. 64[b]. folgt. Aus der letzten Congruenz folgt endlich *AB* = *AC*; w. z. b. w.

Anmerk. Auf diesen Satz gründet sich die Anwendung des Spiegeldiopters (s. S. 19.) zur Ausmessung des Abstandes zweier Punkte, zu deren einem man nicht kommen, wohl aber sehen kann. (Vergl. meine Schrift: Der geodät. Messapparat etc. S. 9 ff.)

Zusatz. Sind in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein gleichseitiges.

§. 67. III. **Congruenzsatz.** *Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die drei Seiten des einen bezüglich den drei Seiten des andern gleich sind.* (Fig. 19.)

Vorauss. *AB* = *DE*
AC = *DF*
BC = *EF*.

Behaupt. △*ABC* ≅ △*DEF*.

Beweis. Man lege (Fig. 21.) das eine Dreieck so an das andre, dass eine beliebige Winkelspitze (*A*) auf diejenige (*D*) im andern Dreieck falle, in welcher die beiden Seiten zusammenstossen, welche den in *A* zusammenstossenden gleich sind; ferner lasse man eine der an *A* stossenden Seiten *AC* auf die ihr gleiche *DF*, und beide Dreiecke auf entgegengesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Seite fallen. Dann folgt zunächst, dass auch *C* auf *F* fallen muss. Zieht man in dem entstandenen Viereck die noch fehlende Diagonale *BE*, so theilt diese das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke, woraus die Gleichheit der Winkel an der gezogenen Diagonale, und mit Zuziehung von §. 10. a. die Gleichheit von *ABC* und *DEF* folgt. Die Congruenz der Dreiecke *ABC* und *DEF* ergiebt sich nun aus §. 63.

Anmerk. Worin ändert sich der Beweis, wenn die Diagonale *EB* (Fig. 22.) ausserhalb des Vierecks fällt?

§. 68. **Lehrsatz.** *In jedem Dreiecke liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.* (*Fig.* 23.)

Vorauss. $BC > AC$

Behaupt. $BAC > ABC$.

Beweis. Man trage auf der grösseren Seite BC von dem Endpunkte (C) aus, welchen sie mit der kleineren gemein hat, die kleinere ($AC = CD$) ab, und verbinde den Abtragungspunkt (D) mit der gegenüberliegenden Winkelspitze (A); dann ist $\triangle CAD$ gleichschenklig, und folglich $CAD = CDA$. Nun ist aber $CDA > ABD$ (nach §. 59^b.) und deshalb auch $CAD > ABD$ (nach §. 14.), um so mehr aber $BAC > ABC$ w. z. b. w.

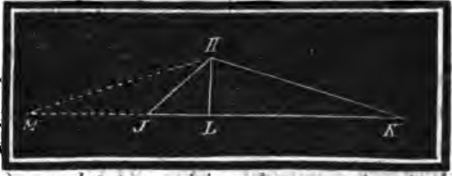
§. 69. **Lehrsatz.** *In jedem Dreiecke liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.* (*Fig.* 23.)

Vorauss. $BAC > ABC$.

Behaupt. $BC > AC$.

Beweis ist indirect zu führen und es ist mit Zuziehung der §§. 66. und 68. zu zeigen, dass die Annahme $BC =$ oder $< AC$ auf etwas der Voraussetzung Widersprechendes führt.

§. 69^b. **Zusätze.** 1) *Im rechtwinkligen Dreieck* (HLK) *ist die Hypotenuse* (HK) *immer grösser als jede der beiden Katheten* (HL, LK) *und somit ist von allen Linien, welche sich von einem Punkte* (H) *ausserhalb einer Linie* (MK) *an letztere ziehen lassen, das Loth* (HL) *die kürzeste, und es ist jede andere Linie* (HJ, HM) *um so grösser, je weiter ihr Durchschnittspunkt* (J, M) *vom Fusspunkte* (L) *des Lothes absteht. Das Loth heisst der Abstand des Punktes von der Linie.*



2) *Zu jeder Linie* (HK), *die sich ausser dem Lothe* (HL) *von einem Punkte* (H) *ausserhalb einer Linie* (MK) *an diese ziehen lässt, giebt es eine* (HM), *aber auch nur eine, ihr gleiche auf der andern Seite des Lothes. Es werden nämlich diejenigen Linien auf entgegengesetzten Seiten des Lothes*

gleich sein, welche mit letzterm gleiche Winkel (HML = HKL), *bilden.*

Beweis. Ergiebt sich aus der Congruenz der erhaltenen Dreiecke, die sich (nach §. 64.) leicht erweisen lässt. Dass es auf jeder Seite nur eine Linie von bestimmter Länge giebt, folgt aus 1.).

3) *Mit Hülfe von* §. 69. *lässt sich auch jetzt der Satz streng erweisen*, *welcher unter* §. 25, *als Grundsatz aufgestellt worden ist*: „*Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.*"

Es sei ACD (Fig. 23.) ein beliebiges Dreieck, man mache $BD = AD$ und ziehe AB, dann ist W. DAB = W. DBA (§. 65.), folglich W. $CAB >$ W. ABC, also auch (§. 69.) $CB > AC$ oder $CD + AD > AC$. Es ist also zunächst erwiesen, dass in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten grösser als die dritte ist. (Vgl. §. 57.) Es ergiebt sich aber hieraus ohne Schwierigkeit, dass auch jede beliebige gebrochene oder krumme Linie zwischen zwei Punkten grösser ist, als die geradlinige Verbindung derselben.

Anmerk. Will man den Grundsatz unter §. 25. nicht gelten lassen, so lasse man ihn dort aus, ebenso den §. 57., und schalte §. 57. hier ein und lasse dann §. 25. folgen. Ausser in §. 57. ist nämlich von jenem Grundsatze nirgends eine Anwendung gemacht worden, und von §. 57. bisher überhaupt noch gar keine.

§. 70. IV. **Congruenzsatz.** *Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen bezüglich gleich sind und überdies die beiden Gegenwinkel der andern gleichen Seiten zugleich spitz oder stumpf sind*, *so sind die Dreiecke congruent.* (Fig. 24.)

Vorauss. $AB = A'B'$
$BC = B'C'$
$BAC = B'A'C'$
ACB und $A'C'B' >$ oder $< R$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'A'$

Beweis. Liesse sich erweisen, das $AC = A'C'$ wäre, so würde die Congruenz nach §. 67. folgen. Suchen wir deshalb nachzuweisen, dass diese Seiten nicht ungleich sein können. Gesetzt nun eine von beiden Seiten wäre kleiner als

die andere, also vielleicht $A'C' < AC$, so müsste sich von AC ein Stück $AD = A'C'$ abschneiden lassen. Verbände man nun B mit D, so müsste $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ nach §. 63., folglich auch $BD = BC' = BC$, also $\triangle BDC$ gleichschenklig sein. Hieraus würde wieder folgen, dass die Winkel an der Grundlinie BDC und BCD spitze Winkel wären und BDA als Aussenwinkel müsste stumpf sein und deshalb auch der ihm gleiche Winkel $B'C'A'$. Nach der Voraussetzung sollen aber die Winkel bei C und C' zugleich spitze oder stumpfe sein, und hier hat die Annahme, $A'C'$ sei $< AC$, darauf geführt, dass der bei C ein spitzer und der bei C' ein stumpfer wäre, folglich muss diese falsch und $AC = A'C'$ sein, woraus die Congruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt.

Anmerk. Aus der Congruenz der Figuren folgt jederzeit auch die Flächengleichheit. Zählt man diese mit unter die Bedingungen, so erhält man noch für die Dreiecke vier neue Congruenzsätze.

Zwei Dreiecke sind congruent:

1) wenn der Inhalt und zwei Winkel,
2) wenn der Inhalt, eine Seite und ein anliegender Winkel,
3) wenn der Inhalt, eine Seite und ihr Gegenwinkel,
4) wenn der Inhalt und zwei Seiten, deren eingeschlossener Winkel aber beiderseits entweder spitz oder stumpf sein muss,

in beiden Dreicken bezüglich gleich sind.

Wie lauten die Congruenzsätze für zwei rechtwinklige und für zwei gleichschenklige Dreiecke?

§. 71. **Lehrsatz.** *Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.* (*Fig.* 25.)

Voraus. $\begin{cases} AB = ab \\ AC = ac \\ BAC > bac \end{cases}$

Behaupt. $BC > bc$.

Beweis. Man lege das eine Dreieck abc so auf das andre ABC, dass a auf A, ab auf AB und beide Dreiecke auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen; dann folgt, dass ac zwischen die Schenkel AB und AC (§. 32[b].) fallen muss. Der Punkt c kann aber 3 verschiedene Lagen bekommen, er kann entweder innerhalb des Dreiecks

ABC, oder ausserhalb desselben, oder auf *BC* fallen. Wäre das Letztere der Fall, so folgte unmittelbar, dass $BC > bc$.

Im ersten Falle verbinde man *c* mit *C*. Dann ist wegen $ac = AC$, $ACc = AcC$ und deshalb *BcC* und um so mehr noch *BcC* ein stumpfer Winkel, und also *BC* die grösste Seite im $\triangle BcC$, folglich $BC > bc$.

Fällt *c* ausserhalb des Dreiecks (Fig. 26.), so folgt der Satz durch ähnliche Betrachtungen.

§. 72. **Lehrsatz.** *Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die dritten aber ungleich sind, so sind auch die der dritten Seite gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar liegt der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber.* (*Fig.* 25.)

Vorauss. $\left\{\begin{array}{l} AB = ab \\ AC = ac \\ BC > bc \end{array}\right.$

Behaupt. $BAC > bac$.

Beweis. Ist indirect zu führen, und zu zeigen, dass die Annahme, die Winkel seien gleich oder der grösseren Seite liege der kleinere Winkel gegenüber, auf etwas der Annahme Widersprechendes führt.

Viertes Kapitel.

Lehrsätze vom Kreise, die Durchschnittspunkte der Kreislinie mit einer Geraden oder andern Kreislinie betreffend.

§. 73. **Lehrsatz.** *Je nachdem der Abstand des Mittelpunktes eines Kreises von einer geraden Linie grösser, eben so gross oder kleiner als der Radius des Kreises ist, je nachdem hat der Kreis mit der Linie keinen, einen Punkt (in welchem Falle die Linie eine Berührende oder Tangente an den Kreis genannt wird) oder zwei Punkte gemein.*

Beweis. Im 1. Falle (Fig. 27. a.) ist $AB > AC$, so dass *B* (§. 28^b^. 2.), um so mehr aber alle übrigen Punkte

der Linie MN (§. 69[b]. 1.), ausserhalb der Peripherie des Kreises liegen müssen.

Im 3. Falle ist (Fig. 27[c].) der Fusspunkt B (§. 28[b]. 2.) innerhalb des Kreises. Da nun der Kreis eine geschlossene Figur (§. 28. 1.) ist, so muss eine von einem innerhalb liegenden Punkte B ausgehende gerade Linie bei gehöriger Verlängerung den Umfang schneiden. Es geschehe dies in C. Da es nun aber (§. 69[b]. 2.) auch auf der andern Seite des Lothes AB eine, aber auch nur eine, Linie $AC' = AC$ giebt, so muss auch C', aber auch nur noch dieser einzige Punkt ein Durchschnittspunkt des Kreises mit der geraden Linie sein.

§. 73[b]. **Zusätze.** 1) *Da diese genannten drei Lagen einer geraden Linie gegen die Kreislinie die nur überhaupt möglichen sind, so folgt unmittelbar, dass kein Theil der Kreislinie eine gerade Linie sein kann, weil dann der Kreisumfang mit einer geraden Linie unzählig viele Punkte gemein haben müsste, da ja auf einer geraden Linie sich unzählig viele Punkte annehmen lassen. Hieraus folgt denn nun, dass die Kreislinie eine krumme Linie ist.*

2. *Jede gerade Linie, welche im Endpunkte des Radius eines Kreises auf ersterem senkrecht steht, ist eine Berührende an den Kreis.*

3. *Jede Sehne fällt in allen ihren Punkten ganz innerhalb der Kreislinie und ihre Verlängerungen nach beiden Seiten ganz ausserhalb.*

§. 74. **Erklärung.** Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise wird die Centrallinie dieser Kreise genannt.

§. 75. **Lehrsätze.** 1) *Ist die Centrallinie zweier Kreise*

a) *grösser als die Summe der Radien, oder*

b) *kleiner als die Differenz der Radien,*

so schneiden sich beide Kreise gar nicht. Im ersteren Falle liegen beide Kreise ganz ausser einander, im zweiten liegt der eine innerhalb des andern.

a) Vorauss. $AB > R + r$ (Fig. 28.), wo R den Radius des Kreises aus A, und r den des Kreises aus B bezeichnen möge.

Behaupt. Die Kreise haben keinen Punkt mit einander gemein.

Beweis. Gesetzt beide Kreise hätten einen Punkt C gemein, so wäre, wenn man die Radien $AC=R$ und $BC=r$ zöge, in dem Dreieck ACB, weil nach Voraussetzung $R+r<AB$, auch $AC+BC<AB$. Dies ist aber wegen §. 57. 1. unmöglich.

Vorauss. $AB<R-r$. (Fig. 29^c^.)

b) Behaupt. Die Kreise haben keinen Punkt gemein.

Beweis. Gesetzt beide Kreise hätten einen Punkt C gemein, so wäre, wenn man die Radien AB und AC zöge, wegen der Voraussetzung $AC-BC>AB$. Dies ist aber wegen §. 57. 2. unmöglich.

2) *Ist die Centrallinie zweier Kreise*

a) *gleich der Summe ihrer Radien, oder*

b) *gleich der Differenz der Radien,*

so haben beide Kreise nur einen Punkt mit einander gemein, d. h. sie berühren einander. Im ersten Falle berühren die Kreise einander von aussen, im zweiten berührt der kleinere den grösseren von innen.

a) Vorauss. $AB=R+r$. (Fig. 28^b^.)

Behaupt. Die Kreise berühren einander.

Beweis. Schneidet der eine Kreis die Centrallinie AB in C, so muss auch der andere Kreis durch A gehen, weil $AB=$ der Summe der Radien ist. Einen zweiten Punkt C' können sie aber nicht gemein haben, weil $AC'+BC'=AB$ wegen §. 57. 1. ungereimt ist.

b) Vorauss. $AB=R-r$. (Fig. 29^b^.)

Behaupt. Die Kreise berühren einander.

Beweis. Schneidet der Kreis aus A die verlängerte Centrallinie in C, so ist $AC=R$, und folglich $BC=R-AB$. Nach der Voraussetzung ist aber auch $r=R-AB$, folglich ist $BC=r$, d. h. der Kreis um B muss auch durch C gehen. Einen zweiten Punkt C' können aber beide Kreise nicht gemein haben, weil $AC'-BC'=AB$ wegen §. 57. 2. ungereimt ist.

3) *Ist die Centrallinie zweier Kreise kleiner als die Summe der Radien, aber gleichzeitig noch grösser als die Diffe-*

renz derselben, so schneiden die Kreise einander in zwei Punkten.

Vorauss. $R - r < AB < R + r$.

Behaupt. Die Kreise schneiden einander in zwei Punkten.

Beweis. Nehmen wir an, R sei nicht kleiner als r (also $R \geqq r$), so kann AB grösser, ebenso gross oder kleiner als r (also $AB \gtreqless r$) sein. Es sei nun

a) $AB \geqq r$ (Fig. 28^c.), so ist

weil $AB < R + r$,
auch $AB - r < R$,
oder $AC < R$,

d. h. der Punkt C' fällt innerhalb des aus A (mit R) beschriebenen Kreises. Nun ist aber auch

$$AB > R - r,$$
also $AB + r > R$,
oder $AC > R$,

d. h. der Punkt C' fällt ausserhalb des aus A (mit R) beschriebenen Kreises.

b) Ist $AB < r$ und also um so mehr $AB < R$ (Fig. 29^a.), so ist,

weil $R - r < AB$,
auch $R - AB < r$,
oder $BC' < r$,

d. h. C' fällt innerhalb des aus B (mit r) beschriebenen Kreises. Nun ist aber $AB + R > R \dot{>} r$ oder $BC > r$, d. h. C fällt ausserhalb des aus B (mit r) beschriebenen Kreises.

In beiden Fällen giebt es also in einem der Kreise zwei Punkte, von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb des andern liegt; hieraus folgt, dass die Kreise einander wenigstens in zwei Punkten D und D' schneiden müssen. Sie können einander aber ausser dem in keinem dritten Punkte schneiden, denn wäre D'' ein solcher dritter Durchschnittspunkt, so müsste $\triangle AD''B \cong \triangle ADB$ oder $\cong \triangle AD'B$ sein, was unmöglich ist, wenn D'' ein von D und D' verschiedener Punkt sein soll.

Zweites Kapitel.

Aufgaben.

§. 76. **Aufgabe.** *Ein Dreieck zu construiren, wenn dessen drei Seiten gegeben sind.* (*Fig.* 30.)

Auflösung. Man trage eine der gegebenen Seiten a auf einer geraden Linie $= AB$ ab, schlage aus dem einen Endpunkte B mit einer der beiden andern b einen Kreisbogen und ebenso aus A mit c und verbinde den Durchschnittspunkt C der Kreisbögen mit A und B, so ist das entstandene Dreieck ABC das verlangte.

Beweis. Es ist $AB = a$ abgetragen, $AC = b$ als Radius in dem mit b beschriebenen Kreise; und aus einem ähnlichen Grunde $BC = c$, folglich enthält das Dreieck die gegebenen drei Seiten.

Anmerk. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn die Summe je zweier Seiten grösser, ihre Differenz aber kleiner als die dritte ist. Wäre z. B. $b + c = a$, so würde der Durchschnittspunkt beider Kreislinien in die Linie selbst fallen, also kein Dreieck gebildet werden. Wäre $b + c < a$ oder $b - c > a$, so kämen die Kreisbögen gar nicht zum Durchschnitt. (§. 75. 3.) Ist aber obige Bedingung erfüllt, so lässt sich jederzeit ein Dreieck, aber auch nur eins construiren. Letzteres folgt daraus, dass alle mit denselben 3 Seiten construirten Dreiecke congruent sein müssen.

Zusatz. Sind zwei Seiten einander gleich, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Bei diesem muss jeder Schenkel grösser als die halbe Grundlinie sein. Sind alle drei Seiten gleich, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck.

§. 77. **Aufgabe.** *An eine gerade Linie* (MN) *in einem gegebenen Punkte* (A) *einen Winkel anzutragen.* (*Fig.* 31.)

Auflösung. Man schlage mit beliebiger Zirkelweite aus dem Scheitel (a) des gegebenen Winkels einen Kreisbogen und ebenso mit derselben Zirkelweite aus dem Punkte A nach der Seite hin, auf welcher der Winkel liegen soll, einen zweiten Kreisbogen bis an die gegebene Linie. Hierauf fasse man den Abstand der Durchschnittspunkte (b und c) des ersten Kreisbogens mit den Winkelschenkeln in den Zir-

kel und trage ihn vom Durchschnittspunkte (C) des zweiten Kreisbogens mit der geraden Linie auf ersterem bis B hin ab, ziehe AB, dann ist $BAC = bac$.

Beweis Man ziehe BC und bc, dann folgt $BAC = bac$ aus der Congruenz der Dreiecke.

§. 78. **Aufgabe.** *Durch einen gegebenen Punkt (M) ausserhalb einer Geraden (AB) mit dieser eine Parallele zu ziehen.* (*Fig.* 32.)

Auflösung. Man ziehe durch M eine beliebige Gerade MN an AB und trage einen der Winkel (MNB), welchen die beiden Linien mit einander einschliessen, auf der entgegengesetzten Seite von MN an diese im Punkte M an. Der zuletzt gezogene Schenkel MO ist die verlangte Parallele.

Beweis. Folgt aus §. 49. 2.

§. 79. **Aufgabe.** *Von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer Geraden an diese eine Linie zu ziehen, welche mit derselben einen gegebenen Winkel einschliesst.*

Auflösung. Man trage auf der Seite, auf welcher der Punkt liegt, den gegebenen Winkel an einer beliebigen Stelle (nach §. 77.) an und ziehe mit dem gezogenen Schenkel durch den gegebenen Punkt (nach §. 78.) eine Parallele.

Beweis. Folgt aus §. 48. 1.

Anmerk. Wie viele Lösungen lässt die Aufgabe zu?

§. 80. **Aufgabe.** *Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.*

Auflösung. Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die gegebenen Seiten ab und verbinde die Abtragungspunkte durch eine gerade Linie.

Beweis. Folgt aus der Construktion.

Anmerk. Eine Anwendung findet dieser Satz in der geodätischen Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte zu finden, wenn man von keinem zum andern, wohl aber von einem dritten Punkte nach jenen beiden sehen und messen kann. (Vergl. meine Schrift: Der geodätische Messapparat S. 30.)

§. 81. **Aufgabe.** *Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.*

Auflösung. Man trage an den Endpunkten der gegebenen Seite bezüglich die beiden Winkel auf einerlei Seite

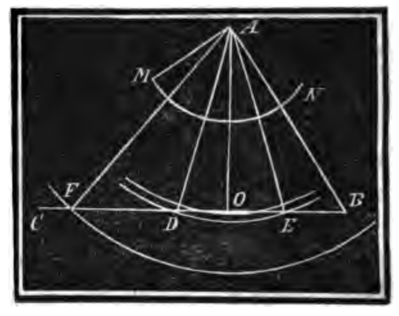
an dieselbe an und verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitte.

Beweis folgt aus der Construktion.

Anmerk. Eine Anwendung findet dieser Satz bei der geodätischen Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte A und B zu finden, wenn man von A nach B wohl sehen, aber nicht messen, von A aber nach einem dritten Punkte C sehen und messen, und von C nach B ebenfalls nur sehen kann. (Vergl. D. geod. Messapparat. S. 9.)

§. 82. **Aufgabe.** *Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der grössern gegeben sind.*

Auflösung. Man mache einen Schenkel AB des gegegebenen Winkels ABC gleich der kleinern Seite, schlage aus dem Endpunkte A derselben mit der grösseren $(=AF)$ als Radius einen Kreisbogen bis zum Durchschnitte mit dem andern Schenkel BC in F, ziehe an diesen Durchschnittspunkt den Radius AF, so ist ABF das verlangte Dreieck.



Beweis. Folgt aus der Construction. Dass es nur ein solches Dreieck geben kann, folgt daraus, dass $AF > AB$ ist, der mit AF beschriebene Kreis also den Schenkel BC selbst nur einmal schneiden kann. (§. 69^b.)

Anmerk. Sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben, so ist, wenn die kleinere Seite AM kleiner ist als das Loth AO, gar kein Dreieck möglich, weil in diesem Falle der mit AM beschriebene Kreisbogen MN die Linie BC (§. 73.) gar nicht schneidet. Ist die kleinere Seite gerade $=AO$, so giebt es (nach §. 73.) nur ein Dreieck (AOB), und wenn endlich die kleinere Seite (AD oder AE) grösser ist als AO, so schneidet der Kreisbogen DE die Linie BC (nach §. 73.) zweimal; es giebt also in diesem Falle zwei Dreiecke ADB und AEB, aber niemals mehr.

§. 83. **Aufgabe.** *In einem Punkte einer gegebenen Geraden ein Loth zu errichten.* (*Fig.* 33.)

Auflösung. Man schneide vom gegebenen Punkte A aus auf beiden Seiten der Linie beliebige, aber gleiche Stücke AB und AC ab, und beschreibe über BC ein beliebiges gleich-

schenkliges Dreieck BCD. Die Verbindungslinie der Spitze D mit A ist das verlangte Loth.

Beweis. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ zu erweisen, woraus dann $BAD = DAC = R$ folgt.

§. 83[b]. **Zusatz.** *Das Loth im gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze zur Grundlinie halbirt diese sowohl, als den Winkel an der Spitze. Man nennt dieses Loth den geometrischen Ort der Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, die die gegebene Grundlinie gemeinschaftlich haben.*

§. 84. **Aufgabe.** *In dem Endpunkte einer geraden Linie (eines Strahles) auf dieser ein Loth zu errichten.* (*Fig.* 35.)

Auflösung. Sei AM die gegebene Gerade, in deren einem Endpunkte A das Loth errichtet werden soll, so schneide man von A aus ein beliebiges Stück AB ab, errichte darüber ein gleichschenkliges Dreieck, ABC, verlängere BC über C hinaus, mache $CD = BC$ und ziehe DA, dann ist $DA \perp AM$.

Beweis. $2x + 2y = 2R$ (§. 60.), folglich $x + y = BAD = R$.

§. 85. **Aufgabe.** *Von einem gegebenen Punkte* (A) *ausserhalb einer geraden Linie* (MN) *auf diese ein Loth zu fällen.* (*Fig.* 34.)

Auflösung. Man schlage aus A mit einer Zirkelweite, welche grösser als der Abstand des Punkts von der Linie (§. 73.), im Uebrigen aber beliebig ist, einen Kreisbogen, welcher die Gerade MN (in B und C) schneidet und aus B und C mit derselben (oder auch mit einer grössern) Zirkelweite auf entgegengesetzter Seite mit dem gegebenen Punkte A in Bezug auf die Gerade zwei Kreisbögen, welche einander (in D) schneiden, dann ist die Verbindungslinie $AD \perp BC$.

Beweis. Man ziehe AB, AC, BD und CD und beweise, dass $ABD \cong \triangle ACD$, woraus sich dann die nöthigen Bedingungen zum Beweise, dass auch $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ ist, ergeben, aus welcher Congruenz sich dann $AEB = AEC = R$ folgern lässt.

Anmerk. Von welcher frühern Aufgabe ist diese ein specieller Fall? Wie würde die analoge Lösung lauten? Gelangt man nicht auch zu einer richtigen Lösung, wenn D mit A auf einerlei Seite mit MN liegt?

§. 85[b]. **Zusatz.** *Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden lässt sich auf diese nur ein einziges Perpendikel fällen.*

§. 86. **Aufgabe.** *Eine gegebene Gerade zu halbiren.*

Auflösung. Ist mit Zuziehung von §. 83[b]. zu machen. Der Beweis folgt aus demselben Satze.

§. 87. **Aufgabe.** *Einen gegebenen Winkel zu halbiren.* (*Fig.* 36.).

Auflösung. Man schneide auf den Schenkeln des gegebenen Winkels vom Scheitel A aus beliebige aber gleiche Stücke ($AB = AC$) ab und beschreibe mit einem und demselben Radius aus den Endpunkten (B und C) dieser abgetragenen Stücke zwei Kreisbögen, welche einander (in D) schneiden. Die Verbindungslinie dieses Durchschnittspunkts mit dem Scheitel des Winkels (AD) halbirt den Winkel.

Beweis. Man ziehe BD und CD, dann folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABD und ACD, dass $BAD = CAD$.

Zusatz. Durch fortgesetztes Halbiren kann ein gegebener Winkel in 4, 8, 16 *u. s. w. gleiche Theile getheilt werden.*

Anmerk. 1. Neben diesen finden sich anderweitige hierher gehörige Aufgaben in meiner Formenlehre und Aufgabensammlung, Halberstadt 1842. auf Seite 6 bis 29, wo bei den Aufgaben über das Dreieck vorher nur erst gezeigt werden muss, dass ausser den Seiten und Winkeln eines Dreiecks auch die Höhen, Halbirungslinien der Winkel u. s. w. Bestimmungsstücke desselben sind. Ausserdem sehe man Geometrische Lehrsätze und Aufgaben etc. Mit Beweisen und Auflösungen herausgegeben von Dr. Wiegand. Halle 1846. 1 Band. 1. Abschnitt. Die interessantesten Constructionsaufgaben über Dreiecke enthält die Schrift: Geometrische Aufgaben von Miles Bland. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. A. Wiegand. Halle 1850. (S. den Anhang zu diesem Cursus, namentlich aber den zum zweiten Cursus.)

Anmerk. 2. Auf eine höchst einfache und leichte Art kann man sich für eine bestimmte Anzahl von Bestimmungsstücken alle möglichen Aufgaben die Construction der Dreiecke betreffend aufstellen, wenn man aus diesen Bestimmungsstücken als Elementen die Combinationen ohne Wiederholungen zur 3ten Klasse bildet. Streicht man hiervon diejenigen Complexionen, welche blos Winkel enthalten, so wie auch diejenigen, in welchen ein Element durch das andre, oder durch die beiden andern zugleich mit gegeben ist, so stellen die übrigen ebensoviel Aufgaben dar, von denen allerdings noch mehre bei der

Einkleidung in Worte zusammenfallen. Da die Schüler die Bildung genannter Combinationen sehr leicht begreifen und mit vielem Vergnügen ausführen, so ist dies für dieselben eine eben so angenehme, als fruchtbringende Beschäftigung, indem das Einkleiden der Complexionen in Worte eine vortreffliche Uebung des Nachdenkens ist. In gleicher Weise, wie beim Dreieck, lassen sich die Aufgaben für die Parallelogramme, Trapeze, allgemeinen Vierecke etc. bilden. Später lassen sich die Flächeninhalte dieser Figuren, die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise beim Dreieck und bei den durch Diagonalen entstandenen Dreiecken mehrseitiger Figuren herzuziehen; ferner lassen sich aus den Combinationen zur 4ten, 5ten etc. $n$ten Klasse in jeder Complexion je zwei gleichartige Elemente zur Summe, zur Differenz, zum Rechteck oder Verhältniss verbinden. Wie man es in ähnlicher Weise bei der 5ten, 6ten, $n$ten Klasse machen kann, ist nun wohl leicht zu ersehen. Dass diese gefundenen Aufgaben auf dem Standpunkte des Schülers nicht sämmtlich lösbar sind, thut hier weiter nichts zur Sache.

Dritter Abschnitt.

Von den Vielecken im Allgemeinen und den Parallelogrammen im Besondern.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Lehrsätze von Vielecken.

§. 88. **Lehrsatz.** *In jedem Vielecke ist die Anzahl aller Diagonalen, welche sich aus einer Winkelspitze ziehen lassen, gleich der um drei verminderten Seitenzahl.*

Beweis. Nach dem Punkte, von welchem aus die Diagonalen gezogen werden sollen, lässt sich natürlich keine ziehen, ebensowenig aber auch nach den beiden mit dem erstern durch Seiten verbundenen Winkelspitzen. Ist also die Anzahl der Seiten und folglich auch der Endpunkte $= n$, so bleiben doch nur noch $n - 3$ Punkte übrig, nach denen sich Diagonalen ziehen lassen. Die Anzahl der letztern ist also selbst $= n - 3$.

§. 88ᵇ. **Zusatz.** *Die Anzahl aller möglichen Diagonalen, welche sich in einem Vielecke ziehen lassen, ist gleich*

dem halben Producte aus der ganzen Seitenzahl in die um 3 verminderte.

Beweis. Es lassen sich nämlich in einem Vielecke von n Seiten aus jeder Winkelspitze nach vorigem Satze $n-3$, also im Ganzen $n(n-3)$ Diagonalen ziehen. Nun ist aber jede derselben zweimal gezählt, deshalb ist das Product noch durch 2 zu dividiren, und es ist somit die Anzahl aller möglichen Diagonalen $= \frac{n\,(n-3)}{2}$.

§. 89. **Lehrsatz.** *In jedem Vielecke wächst die Summe der Winkel um zwei Rechte* (2R), *wenn die Anzahl der Seiten um eine zunimmt.* (*Fig.* 37.)

Beweis. Es sei MN eine Seite eines Vielecks von n Seiten; man construire

I. nach aussen darüber das Dreieck MON und betrachte nun statt MN die Seiten MO und ON als Vielecksseiten, so hat man offenbar ein Vieleck von $(n+1)$ Seiten. Die Summe der Winkel ist hierdurch aber um $NMO + MON + ONM = 2R$ (§. 60.) vermehrt worden, was behauptet wurde. Construirt man das Dreieck $MO'N$

II. nach innen und nimmt entsprechend MO' und $O'N$ statt MN als Vielecksseiten, so hat man ein $(n+1)$eck, dessen Winkelsumme sich um den convexen Winkel $MO'N$ vermehrt, gleichzeitig aber um $O'MN + O'NM$ vermindert hat. Verlängert man MO' bis P, so ist $PO'N = O'NM + O'MN$ (§. 59.) und ist deshalb die Winkelsumme noch um den gestreckten Winkel $MO'P$ grösser, als die des $n$ecks, was ebenfalls der Behauptung entspricht. Vielecke mit convexen Winkeln nennt man Vielecke mit einspringenden Winkeln. (Vgl. §. 54b 2.)

§. 89b. **Lehrsatz.** *Die Summe aller innern Winkel eines Vielecks ist gleich soviel Rechten als die um 4 verminderte doppelte Seitenzahl angiebt.*

Voraussetzung. Ein Vieleck hat n Seiten.

Behaupt. Die Summe der innern Winkel desselben ist $S = (2n-4)R$ oder $S = 2nR - 4R$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass der Satz vom Dreieck gilt, denn bei diesem ist (§. 60.) die Summe aller Winkel

$$(2.\ 3-4) \text{ Rechte} = 2 \text{ Rechte}.$$

Könnten wir nun erweisen, dass, wenn der Satz für irgend ein Vieleck gilt, er auch für dasjenige gelten müsse, welches eine Seite mehr hat; oder, was dasselbe ist, könnten wir zeigen, dass, wenn der Satz vom $n$eck gilt, er auch vom $(n+1)$eck gelten müsse; so würden wir schliessen dürfen, dass der Satz, weil er vom Dreiecke gilt, auch vom Vierecke, und weil von diesem, auch vom Fünfecke u. s. f., allgemein von jedem Vielecke gelten müsse. Nehmen wir deshalb an, der Satz gelte für ein beliebiges $n$eck und es sei dessen Winkelsumme

$$S = 2nR - 4R,$$

so wird man für die Winkelsumme des $(n+1)$ ecks (nach §. 89.) haben

$$\begin{aligned} S &= 2nR - 4R + 2R \\ &= 2nR + 2R - 4R \\ &= 2(n+1)R - 4R, \end{aligned}$$

also auch so viel Rechte, als die um 4 verminderte doppelte Seitenzahl angiebt. Nun ist aber der Satz für $n=3$ richtig, folglich auch für $n+1=4$, wovon sich weiter auf die Richtigkeit beim Fünfecke, Sechsecke etc. und allgemein bei jedem Vielecke schliessen lässt, so dass der Satz allgemein gilt.

Anmerk. Man beweist diesen Satz gewöhnlich so, dass man einen Punkt innerhalb des Vielecks mit allen Winkelspitzen verbindet, oder indem man von einer Winkelspitze aus alle möglichen Diagonalen zieht, und aus der Summe der Winkel in den entstandenen Dreiecken auf die Summe der Winkel im Vielecke schliesst. Diese Beweise sind zwar bedeutend einfacher, als der oben gegebene, entbehren aber auch dafür durchaus der Allgemeinheit und können höchstens da, wo die Fassungskraft der Schüler das Verständniss des allgemeinen Beweises noch nicht hoffen lässt, als Nothhelfer statuirt werden. Man muss sich jedoch auch schon bei Anfängern Allgemeinheit in der Beweisführung angelegen sein lassen. Mit der hier angewandten, so überaus fruchtbaren Schlussmethode von n auf $n+1$ können übrigens die Schüler nicht frühzeitig genug bekannt gemacht werden.

§. 89^c. Zusätze. 1) *Ein jedes* n*eck kann höchstens* n — 3 *convexe Winkel haben.*

Beweis. Hätte es z. B. $n-2$ convexe Winkel, so wäre

die Summe dieser Winkel schon grösser als $2(n-2)R$ oder $(2n-4)R$, weil jeder convexe Winkel $>2R$ ist.

2) *Im regulären Vieleck von* n *Seiten ist ein Winkel (ein sogenannter* Polygonwinkel*)* $= \frac{2n-4}{n} R$, *d. h. er ist gleich so viel Rechten, als die Zahl angiebt, welche man erhält, wenn man von der doppelten Seitenzahl die Zahl 4 subtrahirt und die erhaltene Differenz durch die Anzahl der Seiten dividirt.*

3) *Jedes Vieleck kann durch Diagonalen, welche nur in dem Umfange des Vielecks zusammenstossen, in nicht mehr und nicht weniger als* (n—2) *Dreiecke zerlegt werden.*

4) *Die Summe aller Aussenwinkel, welche entstehen, wenn alle Seiten eines Vielecks mit lauter concaven Winkeln über einen ihrer Endpunkte, aber nicht zwei Seiten über denselben Endpunkt verlängert werden, ist* =4R. (*Fig.* 38.)

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=4R.$$

Anmerk. Bei einem Vielecke der bezeichneten Art sind die Aussenwinkel, Nebenwinkel (Supplemente) der innern, bei convexen (einspringenden) Winkeln ist dies jedoch nicht durchweg der Fall. Wenn wir jedoch den Begriff des Supplements eines Winkels ganz allgemein fassen und darunter einen Winkel verstehen, welcher zum andern addirt werden muss, wenn man $2R$ erhalten will, so ersieht man, dass das Supplement eines convexen Winkels ein negativ (subtractiv) zu nehmender Winkel sein muss. In diesem Sinne kann man den ganz allgemeinen Satz aufstellen: „Die Summe der Supplemente aller Winkel eines beliebigen Vielecks ist gleich vier Rechten.

§. 89[d]. **Anmerkung.** Zur Congruenz zweier $n$ecke ist im Allgemeinen die Gleichheit von $(2n-3)$ von einander unabhängigen Stücken erforderlich, was sich, wenn man auf die Zerlegung der $n$ecke in congruente Dreiecke Rücksicht nimmt, durch den Schluss von r auf $r+1$ ergiebt. Die Congruenzsätze für das allgemeine Viereck finden sich in der Schrift: Lehrsätze und Aufgaben aus Jacobi's Anhängen zu van Swindens Elementen der Geometrie. Mit Beweisen, Auflösungen und Zusätzen herausgegeben von Dr. Wiegand. Halle 1847. 1. Band 42 ff. (S. Anhang.)

Zweites Kapitel.

Von den Parallelogrammen.

§. 90. **Erklärung.** Ein Viereck, in welchem die einander gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heisst ein Parallelogramm.

Man bezeichnet ein Parallelogramm durch das Zeichen || gr, hinter welches man die 4 Buchstaben, welche an den Winkelspitzen stehen, oder nur zwei gegenüberstehende Buchstaben setzt; z. B. (Fig. 39.) || gr *ABCD* oder || gr *AC*, oder auch || gr *BD*.

§. 90[b]. **Zusätze.** 1) *Die Summe zweier Winkel im || gr, welche an einer und derselben Seite liegen, ist* =2R.

2) *Je zwei gegenüberstehende Winkel im || gr sind einander gleich.*

3) *Ist im || gr ein Winkel ein* R, *so sind alle übrigen ebenfalls rechte; ist ein Winkel ein schiefer, so sind alle übrigen ebenfalls schiefe.*

Ein || gr der erstern Art heisst ein rechtwinkliges, eins der zweiten ein schiefwinkliges.

§. 91. **Lehrsatz.** *In jedem Parallelogramme sind je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich.* (*Fig.* 39.)

Vorauss. *AB* || *CD*
AD || *BC*.
Behaupt. *AB*=*CD*
AD=*BC*.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AB* und beweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke *ABC* und *ADC*.

§. 91[b]. **Zusätze.** 1) *Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.*

2) *Alle von irgend welchen Punkten einer Linie auf eine andere ihr parallele gefällten Lothe sind einander gleich.* (§. 49[b].)

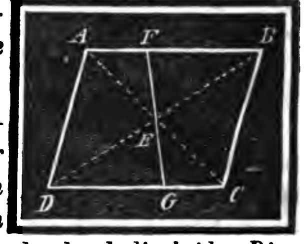
Ein von einem Punkte einer Parallelen auf die andre gefälltes Loth heisst deshalb der Abstand beider Parallelen.

3) *Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. Hieraus folgt, dass ein Parallelogramm bestimmt ist und folglich construirt werden kann, wenn eins dieser Dreiecke gegeben ist.*

4) *Sind in einem Parallelogramme zwei anstossende Seiten einander gleich, so sind alle vier einander gleich.*

5) *Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander, und umgekehrt: wenn in einem Vierecke die Diagonalen einander halbiren, so ist es ein Parallelogramm.*

Beweis. Folgt (Fig. 39.) aus der Congruenz der Dreiecke *ABE* und *DEC.*



6) *Jede durch den Durchschnittspunkt beider Diagonalen gehende Linie halbirt das Parallelogramm.*

7) *Da* (*Zus.* 3.) *ein Parallelogramm bestimmt ist, wenn eins der durch eine Diagonale entstandenen Dreiecke* ABC (*Fig.* 39.) *gegeben ist, und dieses wiederum durch jedes der durch die beiden Diagonalen gebildeten* 4 *Dreiecke, z. B. durch* ABE *bestimmt ist, indem* AB *und* BAC *in beiden gemein und durch* AE *auch* AC *gegeben ist, so ist das Parallelogramm auch durch ein Dreieck der letztern Art vollkommen bestimmt.*

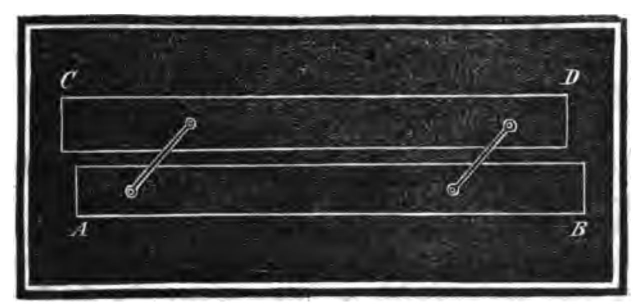
§. 92. **Lehrsatz.** *Sind je zwei Gegenseiten in einem Vierecke einander gleich, dann ist es ein Parallelogramm.* (*Fig.* 39.)

Vorauss. $\begin{cases} AB = CD \\ AD = BC. \end{cases}$

Behaupt. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC. \end{cases}$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale, beweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke ($ABD \cong BCD$), dann folgt aus §. 49. 2., dass die Gegenseiten parallel sind.

Anmerk. Auf diesen Satz gründet sich der Gebrauch des Parallelenziehers.



§. 93. **Lehrsatz.** *Sind zwei Seiten in einem Vierecke gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.* (*Fig.* 39.)

Vorauss. $AB \# CD$.
Behaupt. $AD \parallel BC$.

Beweis. Aus $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§. 63.) folgt $AD = BC$ und hieraus (§. 92.) mit Rücksicht auf die Voraussetzung endlich $AD \parallel BC$, w. z. b. w.

§. 94. **Lehrsatz.** *Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.* (*Fig.* 39.)

Vorauss. $\begin{cases} ABC = ADC \\ DAB = BCD. \end{cases}$

Behaupt. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC. \end{cases}$

Beweis. Nach §. 80[b]. ist die Summe aller Winkel gleich $4R$, folglich $ABC + BCD = 2R$, deshalb $AB \parallel CD$, und auch $BCD + CDA = 2R$, deshalb $AD \parallel BC$ } (§. 49. 3.)

§. 95. **Erklärungen.** 1) Sind in einem Parallelogramme alle Seiten gleich und alle Winkel Rechte, so heisst es ein Quadrat. (Fig. 40.)

2) Sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich, aber alle Winkel Rechte, so heisst es ein Rechteck. *(Oblongum.)* (Fig. 41.)

3) Sind alle Seiten eines Parallelogramms gleich, die Winkel aber schiefe, so heisst es ein Rhombus oder eine Raute. (Fig. 42.)

4) Sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich und die Winkel schiefe, so heisst das Parallelogramm ein Rhomboid. (Fig. 42.)

§. 95[b]. **Zusätze.** 1) *Da (§. 91[b]. 3. und 7.) ein Parallelogramm durch jedes der durch die Diagonalen gebildeten Dreiecke bestimmt wird, und da hinwiederum ein Dreieck durch 3 Stücke, bei denen wenigstens eine Seite sein muss, bestimmt ist; so ist auch im Allgemeinen ein Parallelogramm durch drei solche Stücke, zu denen ausser den Seiten und Winkeln des Parallelogramms die Diagonalen und die Winkel, welche sie unter sich und mit den Seiten bilden, gehören, bestimmt. Da nun beim Quadrat alle Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig, beim Rechteck rechtwinklig, beim Rhombus gleichschenklig und beim Rhomboid ungleichseitig sind, so sind zur Construction*

a. eines Quadrats ein Stück,

b. eines Rechtecks 2 Stücke,

c. eines Rhombus 2 Stücke,

d. eines Rhomboids 3 Stücke unter obiger Bedingung hinreichend, aber auch erforderlich.

2) *Wenn man die Schenkel eines rechten Winkels gleich einer gegebenen Linie* a *macht, und zieht durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke mit diesen Parallelen bis zum Durchschnitte, so ist das dadurch entstandene Parallelogramm ein Quadrat, das die Linie* a *zur Seite hat. Leicht zu ersehen ist hieraus, wie aus zwei Seiten* b *und* c *ein Rechteck zu construiren ist.*

Anmerk. 1. Man bezeichnet ein Quadrat, dessen Seite $= a$ ist, durch aq oder a^2, und ein Rechteck, dessen Seiten b und c sind, durch $b \times c$ oder bc. Der Grund für diese Bezeichnungsweise wird sich später ergeben. (Vgl. II. Curs. d. Plan. §. 40.)

Anmerk. 2. Wie sich für die einzelnen Parallelogramme die verschiedenartigsten Aufgaben bilden lassen, ist aus dem früher beim Dreiecke (§. 87. Anmerk. 2.) Gesagten zu ersehen.

3) *Im Quadrat und Rechteck sind die Diagonalen einander gleich. (Fig. 40. und 41.)*

Beweis. Folgt aus der Congruenz der Dreiecke *ABD* und *ABC*.

4) *Quadrat und Rhombus werden durch beide Diagonalen in vier congruente Dreiecke getheilt.* (*Fig.* 40. *und* 42.)

Beweis. Folgt aus §. 67.

5) *Im Quadrat und Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.* (*Fig.* 40. *und* 42.)

Beweis. Folgt aus 4) mit Rücksicht auf §. 36.

§. 96. **Erklärungen.** 1) Ein Viereck, in welchem 2 Seiten parallel und die beiden andern gleich (aber nicht parallel) sind, heisst ein Antiparallelogramm.

2) Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel, die beiden andern aber weder parallel noch gleich sind, heisst ein Trapez.

3) Ein Viereck in welchem keine Seite der andern parallel ist, heisst ein Trapezoid.

§. 96[b]. **Zusätze.** *In jedem Antiparallelogramm* ABCD (*Fig.* 44.) *ist*:

1) Winkel $ADC = BCD$ ($\triangle ADF$ ist gleichschenklig).

2) Winkel $ABC = BAD$ (die Ergänzungen voriger zu $2R$.).

3) $\left\{ \begin{array}{l} \triangle ACD \cong \triangle BDC \\ \triangle ABD \cong \triangle ABC \end{array} \right\}$ (§. 63.)

4) $BD = AC$.

5) $\triangle DEC$ und $\triangle AEB$ gleichschenklig. (§. 11. a. in Bezug auf Winkel.)

6) $\triangle AED \cong \triangle BEC$ (§. 63.).

(Die Aufstellung der Sätze in Worten, so wie die Ausführung ihrer Beweise überlassen wir dem Anfänger).

§. 97. **Lehrsätze.** *Wenn man durch den Mittelpunkt einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele mit den parallelen Seiten zieht,*

1) *so halbirt diese die andere nicht parallele Seite ebenfalls, und*

2) *ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten oder wie man sagt: gleich dem arithmetischen Mittel zwischen beiden parallelen Seiten.* (*Fig.* 45.)

Beweis. 1) Man ziehe $EK \parallel AG \parallel BC$, dann ist $\triangle AEH \cong$

$\triangle DEK$ (§. 64.). Hieraus folgt $AH = EK = HG$ und hieraus (§. 91[b].) $BF = FC$.

2) Verlängern wir noch EK und AB bis zum Durchschnitte in I, so ist offenbar $AI = DK$. Bezeichnen wir diese Strecke durch x, so ist

$$EF = AB + x, \text{ aber auch}$$
$$EF = DC - x$$
$$2\,EF = AB + DC$$
$$EF = \tfrac{1}{2}(AB + DC), \text{ w. z. b. w.}$$

§. 97[b]. **Zusatz.** *Das im Beweise vorigen Satzes mit x bezeichnete Stück ist gleich der halben Differenz zwischen den parallelen Seiten.*

Behaupt. $DK = AI = \tfrac{1}{2}(DC - AB)$.

Beweis. Es ist

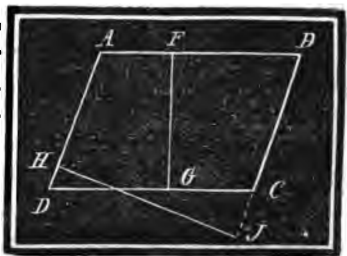
$$x = DC - EF$$
$$x = EF - AB$$
$$2x = DC - EF + EF - AB$$
$$= DC - AB$$
$$x = \tfrac{1}{2}(DC - AB), \text{ w. z. b. w.}$$

Drittes Kapitel.

Von der Gleichheit der Flächeninhalte der Parallelogramme und Dreiecke.

Pythagoräischer Lehrsatz.

§. 98. **Erklärungen.** 1) Der Abstand zweier parallelen Seiten eines Parallelogramms heisst in Bezug auf eine dieser Seiten als Grundlinie eine Höhe desselben.



2) Der Abstand der parallellen Seiten eines Antiparallelogramms oder Trapezes heisst in Bezug auf eine

dieser parallelen Seiten (gewöhnlich der grössern) als Grundlinie die Höhe desselben.

§. 98[b]. **Zusätze.** 1) *Zu jedem Parallelogramme gehören zwei Höhen und zwei Paar Grundlinien.*

2) *Im Quadrat und Rhombus sind, so wie die Seiten, auch die Höhen einander gleich.*

3) *Im Quadrat und Rechteck stellen je zwei zusammenstossende Seiten Grundlinie und Höhe dar. Beim Quadrat ist somit die Höhe gleich der Grundlinie.*

4) *Parallelogramme, welche zwischen denselben Parallelen liegen, d. h. von denen jedes ein Paar Gegenseiten in diesen Parallelen liegen hat, haben in Bezug auf eine dieser Gegenseiten als Grundlinie gleiche Höhen. Umgekehrt lassen sich Parallelogramme, welche eine gleiche Höhe haben, zwischen dieselben parallelen Linien bringen.*

§. 99. **Lehrsatz.** *Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich, d. h. haben gleichen Flächeninhalt.* (*Fig.* 46.)

Vorauss. { || gr *AC* und || gr *EG* haben gleiche Grundlinien (*DC, HG*) und gleiche Höhen.

Behaupt. || gr *AC* = || gr *EG*.

Beweis. Man lege beide Parallelogramme *ABCD* und *EFGH* zwischen dieselben parallelen Linien (§. 98[b]. 4.) und zwar so, dass sie ganz ausserhalb einander liegen. Hierdurch entstehen 2 Trapeze *AEHD* und *BFGC*, welche gleichen Flächeninhalt haben, da

$$\Delta ADH \cong \Delta BCG \text{ und}$$
$$\Delta AEH \cong \Delta BFG \text{ ist.}$$

Wird beiderseits das gemeinschaftliche Trapez *BEHC* subtrahirt, so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar.

Anmerk. Die beiden grossen Trapeze sind nicht nur einander gleich, sondern auch congruent; doch ist Letzteres hier gleichgültig.

§. 99[b]. **Zusätze.** 1) *Jedes Dreieck lässt sich als die Hälfte eines Parallelogramms ansehen, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.* (§. 91[b]. 3.)

2) *Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.* (1. *und* §. 99.)

3) *Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme, das mit ihm dieselbe Höhe und halbe Grundlinie hat.* (*Fig.* 43.)

Beweis. Verbinden wir die Mittelpunkte der Gegenseiten (E mit F), so ist || gr $AF = \frac{1}{2}$ || gr AC (§. 99.) und auch $\triangle ADC = \frac{1}{2}$ || gr AC (1.)

4) *Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme, das mit ihm dieselbe Grundlinie und halbe Höhe hat.* (*Fig.* 43.)

Beweis. Betrachten wir AD als gemeinschaftliche Grundlinie, so ist || gr $AF \cong$ || gr EC, folglich hat || AF die halbe Höhe von || gr AC u. s. w.

5) *Ein Parallelogramm ist gleich der Hälfte eines andern, das dieselbe Grundlinie und doppelte Höhe, oder doppelte Grundlinie und dieselbe Höhe des erstern hat.*

Beweis. Ergiebt sich leicht aus Fig. 43.

6) *Parallelogramme oder Dreiecke von gleichen Höhen sind zusammengenommen gleich einem dritten Parallelogramme oder Dreiecke, welches dieselbe Höhe und die Summe der Grundlinien zur Grundlinie hat.*

7) *Die Differenz der Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Höhe ist gleich einem Parallelogramme, welches dieselbe Höhe und die Differenz der Grundlinien zur Grundlinie hat.*

8) *Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie sind zusammengenommen gleich einem 3ten Parallelogramme oder Dreiecke, welches dieselbe Grundlinie und die Summe der Höhen zur Höhe hat.*

9) *Die Differenz der Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Grundlinie ist gleich einem Parallelogramme, welches dieselbe Grundlinie und die Differenz der Höhen zur Höhe hat.*

10) *Parallelogramme oder Dreiecke von gleichem Inhalte und gleicher Höhe haben auch gleiche Grundlinien; und umgekehrt bei gleichen Grundlinien auch gleiche Höhen.*

Beweis. Ergiebt sich leicht indirect. Man nimmt an, eins habe eine grössere Grundlinie resp. Höhe, und denkt sich darauf die andre abgetragen und eine Parallele mit der daranstossenden Seite gezogen, dann kommt man wegen der ent-

stehenden gleichen Parallelogramme auf die Ungereimtheit, dass ein Theil gleich dem Ganzen sei.

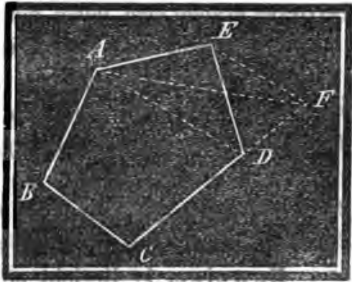
§. 99c. Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich folgende Aufgaben leicht lösen:

1. Ein Dreieck in beliebig viel gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien a) von einer Winkelspitze, b) von einem Punkte einer Seite oder c) von einem Punkte innerhalb ausgehen.

2. Ein Parallelogramm in beliebig viel gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien einer Seite parallel sind.*)

3) Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein anderes, welches einen gegebenen Winkel hat, zu verwandeln.

4. Ein Viereck in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte, oder allgemein ein n eck in ein $(n-1)$ eck zu verwandeln.



5. Jede geradlinige Figur in ein Dreieck oder Parallelogramm zu verwandeln.

6. Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie so zu halbiren, dass die Halbirungslinie durch einen in einer Seite, oder innerhalb, oder ausserhalb des Parallelogramms liegenden Punkt geht.

§. 100. **Lehrsatz.** *Wenn man in einem Parallelogramme eine Diagonale und durch einen Punkt derselben Parallelen mit den Seiten zieht, so wird das ursprüngliche Parallelogramm in vier andere zerlegt, von welchen*

1) die beiden, durch welche die Diagonale geht, mit dem ursprünglichen gleichartig, d. h. bei gleichen Winkeln zugleich mit ihm Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboide sind;

2) die beiden übrigen Parallelogramme dagegen von gleicher Grösse sind. (*Fig.* 47.)

---

*) Bei den ersten beiden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass man eine gerade Linie in beliebig viel gleiche Theile theilen könne.

Vorauss. $\left\{\begin{array}{l}\text{Im } \| \text{gr } AC \text{ ist } FEG \parallel AB \text{ und } IEH \parallel \\ AD\end{array}\right.$

Behaupt. $\left\{\begin{array}{l}1)\ \| \text{gr } IG \text{ und } \| \text{gr } FH \text{ gleichartig.} \\ 2)\ \| \text{gr } AE = \| \text{gr } EC.\end{array}\right.$

Beweis. 1) das FH und IG mit AC gleiche Winkel haben, ergiebt sich unmittelbar. Dass die ersteren Parallelogramme mit letzterm gleichartig sind, wird dadurch erwiesen, dass man zeigt, dass

$$AD \gtreqless AB \text{ auch}$$

$$FD \gtreqless FE \text{ zur Folge hat.}$$

Letzteres ergiebt sich leicht mit Zuziehung von §. 66. und §. 69.

2) Ergiebt sich mit Zuziehung von §. 91^b. 3. u. §. 11. a.

§. 100^b. **Zusätze.** 1) *Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.*

2) *Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.*

Beweise. 1) Ergiebt sich ohne Weiteres aus §. 100.

2) Denken wir (Fig. 47.) $\|$ gr AC als ein Quadrat, setzen $AB = a$, $BI = b$, so ist $\|$ gr $AC = a^2$, $\|$ gr $IG = b^2$, $\|$ gr $FH = (a-b)^2$, $\|$ gr $AG = a \times b$, $\|$ gr $IC = a \times b$. Leicht ergiebt sich nun

$$a^2 = (a-b)^2 + 2.a \times b - b^2;$$

woraus $$a^2 + b^2 - 2.a \times b = (a-b)^2 \text{ folgt}$$

§. 101. **Lehrsatz.** *Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Loth fällt, so ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und ihrem an jener Kathete liegenden Abschnitte.*

Vorauss. $\left\{\begin{array}{l}ABC = R \\ BD \perp AC.\end{array}\right.$

Behaupt. $BC^2 = CD \times AC.$ (Fig. 48.)

Beweis. Man construire $BC^2 = BFEC$ und $CD \times AC = CGHD$ (§. 95^b. 2.); ziehe dann in den erhaltenen Trapezen $AFEC$ und $BCGH$ von den Scheiteln der spitzen Winkel die Diagonalen AE und BG; dann ist

$\triangle ABC \cong \triangle BCG$ (§. 63.),

woraus der Satz mit Zuziehung von §. 99[b]. 1. folgt.

§. 102. **Pythagoräischer Lehrsatz.** *In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über beiden Katheten.*

Vorauss. $\triangle ABC$ bei B rechtwinklig.

Behaupt. $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (Fig. 48.)

1) Beweis. Unmittelbare Folge des vorigen Satzes, wenn man die für beide Katheten erhaltenen Gleichungen addirt.

2) Beweis. Man beschreibe über der Hypotenuse AC (Fig. 49.) auf derselben Seite, wo das Dreieck liegt, das Quadrat $ACDE$, ziehe $DF \perp BC$, $EG \perp DF$ und verlängere AB bis H; dann besteht das ganze Quadrat AD aus den 4 unter einander congruenten Dreiecken ABC, CFD, DGE und EAH und aus dem Vierecke $BFGH$, welches offenbar ein Quadrat mit der Seite $BC - AB$ ist. Nun ist jedes der 4 Dreiecke $= \frac{1}{2}.(BC \times AB)$ (§. 99[b]. 1.), folglich alle vier $= 2.(BC \times AB)$. Es ist somit

$$AC^2 = (BC - AB)^2 + 2.(BC \times AB) =$$
$$BC^2 + AB^2 - 2.(BC \times AB) + 2.(BC \times AB)$$

(§. 100[b]. 2.)

folglich, da offenbar eine Grösse, die erst um etwas vermindert und dann um dasselbe wieder vermehrt wird, ungeändert bleibt:

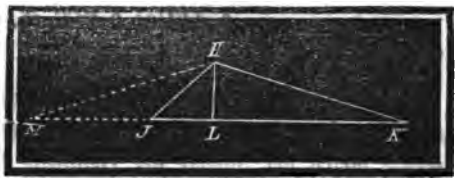
$$AC^2 = BC^2 + AB^2, \text{ w. z. b. w.}$$

(Mehre andere Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes finden sich in der Schrift: Lehrsätze und Aufgaben aus Jacobi's Anhängen zu v. Swindens Geometrie. Mit Beispielen etc. herausgegeben von Dr. Wiegand. 1. Band.)

Anmerk. A) Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich zwei und mehre Quadrate in ein einziges verwandeln.

Anmerk. 2) Solche rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten sich bei einerlei Maass durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, heissen pythagoräische Dreiecke. Eine Tabelle für Seiten solcher Dreiecke s. in meinem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Anh. 5. Kap.

§. 102[b]. **Lehrsätze.** 1) *Das Quadrat über einer Kathete im rechtwinkligen Dreiecke ist gleich dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem der andern Kathete.*



2) *Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Katheten gleich, die andern aber ungleich sind, so sind auch die Hypotenusen ungleich, und zwar gehört zur grössern Kathete die grössere Hypotenuse.*

Vorauss. { In den rechtwinkligen Dreiecken JLH und KLH ist $HL = HL$, $LK > LJ$.

Behaupt. $HK > JH$.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt auch aus §. 69^b. 1.

3) *Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke eine gleiche Hypotenuse haben, aber eine Kathete in dem einen kleiner ist, als eine Kathete im andern, so ist die andere Kathete im erstern Dreiecke grösser, als die andere Kathete im zweiten.*

Vorauss. { $MA = MD$ (Fig. 53.) $MC > MF$.

Behaupt. $AC < FD$.

Beweis. Folgt mit Anwendung des Zus 1.

§. 103. **Lehrsatz.** *Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.*

Beweis. Nach §. 101. ist (Fig. 48.) $BFEC = DCGH$. Trägt man nun $CI = DC$ ab und zieht $IK \| CD$, so ist offenbar das $\|$ gr $DI = DC^2$, Nun ist aber §. 102^b. 1.

$BD^2 = BC^2 - DC^2$, folglich auch,

da $BC^2 = \|$gr DG und

$DC^2 = \|$ gr gr DI,

$BD^2 = \|$gr $DG - \|$ gr $DI = \|$ gr KG.

Nun ist aber, was leicht zu ersehen, $\|$ gr $KG = DC \times AD$, folglich auch $BD^2 = DC \times AD$, w. z. b. w.

§. 104. **Lehrsatz.** *Wenn in einem Dreiecke die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich ist dem Quadrate über der 3ten Seite, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges, und zwar ist die dritte Seite die Hypotenuse desselben.*

Vorauss. $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Fig. 50. a.)

Behaupt. $BAC = R$.

Beweis. Man trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels bezüglich $A'C' = AC$ und $A'B' = AB$ ab und ziehe $B'C'$, wende auf das erhaltene rechtwinklige Dreieck den Pythagoräischen Lehrsatz an, dann folgt die obige Behauptung mit Zuziehung der Voraussetzung und §. 9. aus der Congruenz beider Dreiecke.

§. 104[b] **Zusätze.** 1) *Wenn in einem Dreiecke der Unterschied der Quadrate zweier Seiten gleich ist dem Quadrate der dritten Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.* (Fig. 50. a.)

Wenn $AC^2 = BC^2 - AB^2$, so ist $BAC = R$.

2) *Wenn die Verbindungslinie einer Winkelspitze im Dreieck mit einem Punkte der Gegenseite die letztere so theilt, dass, wenn man von den Quadraten der beiden andern Seiten bezüglich die Quadrate der anliegenden Abschnitte auf der 3ten Seite subtrahirt, man gleiche Unterschiede erhält, so ist die Verbindungslinie eine Höhe des Dreiecks.* (*Fig.* 50. b.)

Vorauss. $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$.

Behaupt. $AD \perp BD$.

Beweis. Man construire aus AB als Hypotenuse und BD als einer Kathete ein rechtwinkliges Dreieck $A'D'B$, mache $D'C' = DC$ und ziehe $A'C'$.

Nun ist nach Voraussetzung

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2,$$

oder $AB^2 - BD^2 + DC^2 = AC^2, \ldots (1)$

Nach §. 120[b]. 1. ist aber auch

$$A'B'^2 - B'D'^2 = A'C'^2 - D'C'^2$$

oder $A'B'^2 - B'D'^2 + D'C'^2 = A'C'^2 \ldots (2)$

Aus der Construktion ergiebt sich aber die Gleichheit der linken Seiten von (1) und (2), folglich muss auch

$A'C'^2 = AC^2$ oder

$A'C' = AC$ sein.

Hieraus folgt (§. 67.)

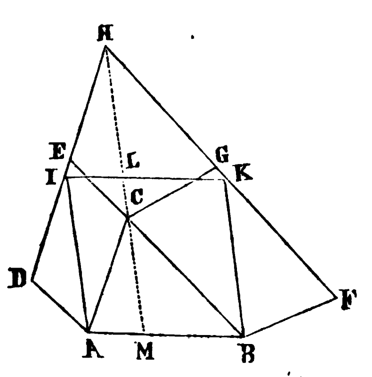
$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, also

Winkel $ABD = A'B'D'$, und hieraus (§. 63.)

$\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$, und daraus

$ABD = A'B'D' = R$,

mithin ist AD die Höhe des Dreiecks, w. z. b. w.



§. 104. **Lehrsatz des Pappus.** *Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks* ABC *über zwei Seiten* AC *und* BC *abwärts vom Dreieck zwei Parallelogramme,* ADEC *und* BFGC, *verlängert ihre den Seiten des Dreiecks parallelen Seiten* DE, GF *bis zum Durchschnitte in* H *und construirt über der dritten Seite* AB *ein Viereck* AIKB, *dessen zwei an* AB *liegenden Seiten parallel der Verbindungslinie* HC *sind und bis an die verlängerten Seiten der beiden andern Parallelogramme gehen; so ist auch das letztere Viereck* ABKI *ein Parallelogramm, welches so gross ist als die beiden vorigen zusammen genommen.*

Voraussetzung. $\left\{ \begin{array}{l} CD \text{ und } CF \text{ sind } \| \text{gre.} \\ AI \| BK \| HC. \end{array} \right.$

Behauptung. 1) $ABKI$ ist ein $\|$ gr.

2) $ABKI = ADEC + BFGC$.

Beweis. Man verlängere HC bis AB und es möge diese Linie in M, IK in L schneiden, dann ist

1) $KB = HC = AI$ (§. 91[b]. 1.)

folglich ist $ABKI$ (§. 93.) ein $\|$ gr.

2) Es ist ferner

$\left. \begin{array}{l} \| \text{gr } BKLM = \| \text{gr } BKHC \\ \qquad\qquad\quad = \| \text{gr } BFGC \end{array} \right\}$ §. 99. und ebenso

$\left. \begin{array}{l} \| \text{gr } BMLI = \| \text{gr } AIHC \\ \qquad\qquad\quad = \| \text{gr } ADEC \end{array} \right\}$ §. 99.

Hieraus aber folgt durch Addition

$\| \text{gr } ABKI = \| \text{gr } ADEC + \| \text{gr } BFGC$, w. z. b. w.

Vierter Abschnitt.

Von Linien und Winkeln beim Kreise.

Erstes Kapitel.

Sehnen und Tangenten beim Kreise.

§. 105. **Lehrsätze.** 1) *Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne ein Loth fällt, so wird die Sehne halbirt.*

2) *Wenn man den Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkte einer Sehne verbindet, so steht die Verbindungslinie auf der Sehne senkrecht.*

3) *Wenn man im Mittelpunkte einer Sehne auf derselben ein Loth errichtet, so geht dieses bei gehöriger Verlängerung durch das Centrum des Kreises.*

Beweis. 1) und 2) ergeben sich unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke (Fig. 51.) AMC und BMC, Bei 3) hat man zu zeigen, dass die Annahme, das Perpendikel CM' gehe nicht durch das Centrum M, auf die Ungereimtheit führt, dass sich in einem Punkte einer Geraden auf derselben Seite zwei Lothe errichten lassen müssten.

§. 105[b]. **Zusatz.** *Wenn man in den Mittelpunkten zweier nicht parallelen Sehnen eines Kreises auf denselben Perpendikel errichtet und dieselben bis zum Durchschnitte verlängert, so ist der Durchschnittspunkt der Perpendikel das Centrum des Kreises.* (*Fig.* 53.)

Anmerk. Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises finden.

§. 106. **Aufgabe.** *Durch drei gegebene Punkte, welche nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.*

Auflösung. Man verbinde einen der drei Punkte mit den beiden übrigen durch gerade Linien und errichte darauf in ihren Mittelpunkten Lothe bis zum gegenseitigen Durchschnitte. Der Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt, und der Abstand desselben von einem der gegebenen Punkte der Radius des Kreises.

Beweis. Ist mit Zuziehung von §. 105^b. zu führen.

§. 106^b. **Zusatz.** *Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ist jederzeit ein, aber auch nur ein Kreis vollkommen bestimmt.*

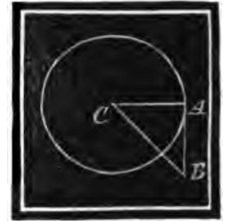
Anmerk. Sind nur zwei Punkte gegeben, so lassen sich unzählig viele Kreise construiren, die alle durch diese beiden Punkte gehen.

§. 107. **Lehrsätze.** 1) *Alle Sehnen, welche gleich weit vom Centrum abstehen, sind einander gleich.* (*Fig.* 52.)

2) *Von zwei Sehnen ist diejenige die grössere, welche den kleinsten Abstand vom Centrum hat.* (*Fig.* 53.)

Beweis. 1) Folgt aus der Congruenz der Dreiecke *MBC* und *MDF*. 2) aus §. 102^b. 3.

§. 108. **Lehrsätze.** 1) *Der an den Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius steht senkrecht auf der Tangente.*



2) *Das im Berührungspunkte der Tangente auf derselben errichtete Loth geht gehörig verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises.*

Beweis. 1) Folgt aus §. 73^b. 2. 2) ist indirect und ähnlich wie §. 105. 3. zu erweisen.

Zweites Kapitel.

Winkel im Kreise.

§. 109. **Erklärungen.** 1) Ein Stück des Kreises, welches von einem Kreisbogen und der dazu gehörigen Sehne begrenzt wird, heisst ein Kreisabschnitt (*Segment*). Ist die Sehne ein Durchmesser, so nennt man das Segment einen Halbkreis.

2) Ein Stück des Kreises, welches von einem Kreisbogen und den an seine Endpunkte gezogenen Radien begrenzt wird, heisst ein Kreisausschnitt (*Sector*).

3) Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heisst ein Peripheriewinkel. Man

sagt, derselbe stehe auf dem Bogen, welcher zwischen den Sehnen liegt.

4) Ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind, heisst ein Centriwinkel. Man sagt, er stehe auf dem Bogen, welcher zwischen den beiden Radien liegt.

§. 109^b. **Zusätze.** 1) *Jede Sehne theilt den ganzen Kreis in zwei Segmente, von denen dasjenige das grössere ist, in welchem das Centrum liegt. Ist die Sehne ein Durchmesser, so sind die Segmente einander congruent.*

2) *Der Halbkreis kann sowohl als Segment, als auch als Sector angesehen werden.*

3) *Je zwei Radien theilen den Kreis in zwei Sectoren, von denen der eine, wofern nicht beide Radien einen Durchmesser bilden, einen concaven, der andere einen convexen Centriwinkel hat.*

§. 110. **Lehrsätze.** *In einem und demselben Kreise oder in mit gleichen Radien beschriebenen, also gleichen, Kreisen gehören:*

1) *zu gleichen Sehnen gleiche (congruente) Kreisbögen,*

2) *zu gleichen Kreisbögen gleiche Sehnen;*

3) *zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bögen, Sehnen, Abschnitte und Ausschnitte.*

4) *Die nach §. 87. (Fig. 36.) den Winkel* BAC *halbirende Gerade* AD *halbirt auch den Kreisbogen* BC *in* E.

Es ergiebt sich hieraus das Verfahren, wie man einen Kreisbogen halbirt.

Die Beweise folgen aus der Congruenz der entsprechenden Ab- und Ausschnitte. Dass die Bögen einander decken, wird dadurch erwiesen, dass (nach §. 28^b. 2.) gezeigt wird, dass weder innerhalb noch ausserhalb eines Bogens ein Punkt des andern zu liegen kommen kann.

§. 111. **Lehrsatz.** *Jeder Peripheriewinkel ist halb so gross, als der zugehörige Centriwinkel, d. h. derjenige, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.*

Vorauss. $\begin{cases} BMC \text{ ist ein Centriwinkel} \\ BAC \text{ ein Peripheriewinkel. (Fig. 54.)} \end{cases}$

Behaupt. $BAC = \frac{1}{2} BMC$ oder $BMC = 2 BAC$.

Beweis. Es sind hier 3 Fälle zu unterscheiden: 1. der Mittelpunkt des Kreises liegt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels;

2. er liegt zwischen diesen Schenkeln; oder endlich

3. er liegt ganz ausserhalb dieser Schenkel.

Im ersten Falle (Fig. 54. a.) folgt die Richtigkeit der Behauptung aus §. 59. und §. 65. Im 2. und 3. Falle wird der Durchmesser AD gezogen (Fig. 54. b. und c.), worauf die Richtigkeit des Satzes aus 1., und bezüglich §. 10. a. und 11. a. folgt.

(Obgleich der Satz hier nach der Figur nur für concave Centriwinkel zu gelten scheint, so gilt er doch allgemein für concave und convexe, und es ist auch der Beweis für convexe Centriwinkel kein anderer als der für concave.)

§. 111[b]. **Zusätze.** 1) *Der Peripheriewinkel auf, und also auch in dem Halbkreise ist ein Rechter; sonst sind aber die Peripheriewinkel spitze oder stumpfe, jenachdem der zugehörige Bogen kleiner oder grösser als die halbe Kreislinie ist.*

2) *Alle Peripheriewinkel auf demselben oder auf gleichen Kreisbögen sind einander gleich; dasselbe gilt von Peripheriewinkeln in demselben oder in gleichen Kreisbögen.*

3) *Die Scheitel aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, liegen in einer und derselben Kreisperipherie, in welcher die Verbindungslinie jener beiden Punkte eine Sehne ist.*

4) *Zwei Peripheriewinkel, deren Bögen einander zur Kreisperipherie ergänzen, betragen zusammen genommen 2 Rechte.*

Beweise. 1) Der zugehörige Centriwinkel ist ein Gestreckter.

2) Sie sind Hälften desselben Centriwinkels.

3) Indirect. (Fig. 55.) Durch die beiden Durchschnittspunkte A und B und eine Winkelspitze (D) lässt sich ein Kreis beschreiben. Fiele nun eine Winkelspitze F über den Kreis hinaus, so wäre $AGB = ADB = AFB$, was §. 59[b]. widerspricht Auf dieselbe Ungereimtheit würde man kommen, wenn man annehmen wollte, F fiele innerhalb des Kreises.

4) Ihre Centriwinkel ergänzen sich zu 4 R.

§. 112. **Aufgabe.** *Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.*

Auflösung. Man schlage über der Verbindungslinie des gegebenen Punkts mit dem Kreismittelpunkte als Durchmesser einen Kreis und verbinde den gegebenen Punkt mit den Durchschnittspunkten beider Kreise. Jede der zuletzt gezogenen Linien ist eine Tangente an den Kreis.

Beweis. Man ziehe an die Durchschnittspunkte beider Kreise im gegebenen Kreise die Radien und wende §. 111^b. 1. an, dann folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 73^b. 2.

§. 112^b. **Zusatz.** *Die beiden Tangenten, welche sich von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an diesen ziehen lassen, sind einander gleich.*

Anmerk. Aus der Congruenz der entstandenen Dreiecke lassen sich noch mehre Zusätze ableiten.

§. 113. **Lehrsatz.** *Der Winkel, welchen eine Tangente mit der an ihren Berührungspunkt gezogenen Sehne macht, ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte.* (*Fig.* 55.)

Vorauss. { AB Sehne, AC Tangente, ADB Peripheriewinkel.

Behaupt. $CAB = ADB$.

Beweis. Man ziehe den Durchmesser AE und verbinde B mit E, dann ist $BAE + BEA = R$ nach §. 111^b. 1. Ferner: $CAB + BAE = R$ nach §. 108. 1., folglich $BAE + BEA = CAB + BAE$, und also auch nach §. 11. a.

$$BEA = CAB.$$

Nun ist aber $BEA = ADB$ nach §. 111^b. 2., folglich $CAB = ADB$, w. z. b. w.

Anhang,

enthaltend Materialien zur Uebung für Schüler.

Erstes Kapitel.

Lehrsätze.

1) Errichtet man im Scheitel eines Winkels auf dessen Schenkeln Lothe, welche auf entgegengesetzten Seiten der letzteren liegen, so schliessen dieselben einen Winkel ein, welcher gleich dem Nebenwinkel des ursprünglichen ist.

2) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

3) Errichtet man auf einer Geraden auf einer Seite beliebig viel gleiche Lothe, so liegen deren Endpunkte sämmtlich in einer der ursprünglichen Geraden parallelen Geraden.

4) Halbirt man den Aussenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks an der Spitze, so ist die Halbirungslinie der Grundlinie parallel.

5) Die zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörigen Höhen sind von gleicher Grösse.

6) Die Verbindungslinie der Fusspunkte vorgenannter Höhen ist der Grundlinie parallel.

7) Lassen sich die beiden vorgenannten Sätze umkehren?

8) Wenn man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Winkelspitzen aus beliebige, aber gleiche Stücke gleichmässig abschneidet, und diese Durchschnittspunkte unter einander verbindet, so entsteht wieder ein gleichseitiges Dreieck.

9) Trägt man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einerseits auf dem Schenkel, andrerseits auf dessen Verlängerung bezüglich gleiche Stücke ab, so wird die Verbindungslinie der Abtragungspunkte durch die Grundlinie des Dreiecks halbirt.

10) Die Summe der Abstände eines Punktes innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich der Höhe des letzteren.

11) Schneidet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus die anliegende Kathete ab, so schliessen die Verbindungslinien der Abtragungspunkte mit der Spitze des rechten Winkels stets einen halben rechten Winkel ein.

12) Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Drei-

ecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um die anstossende Kathete, so schliessen die Verbindungslinien der Abtragungspunkte mit der Spitze des rechten Winkels $\frac{3}{2}R$. ein.

13) Wenn man auf der grössten Seite eines ungleichseitigen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus ein Stück abschneidet, gleich der anliegenden kleinern Seite, und diese Durchschnittspunkte mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet, so ist der Winkel, den diese beiden Linien mit einander bilden, so gross als die halbe Summe der beiden kleinern Dreieckswinkel.

14) Wenn man auf der grösseren von zwei ungleichen Dreiecksseiten von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte aus ein Stück abschneidet, welches gleich ist der kleinern, und diesen Durchschnittspunkt mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet, so ist der Winkel, welchen diese mit der dritten Dreiecksseite bildet, gleich dem halben Unterschiede der beiden Dreieckswinkel, welche den andern Dreiecksseiten gegenüberliegen.

15) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine spitze Winkel halb so gross als der andere, so ist die kleinere der beiden Katheten gleich der Hälfte der Hypotenuse.

16) Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

17) Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Parallelogramms verbindet, so entsteht stets wieder ein Parallelogramm.

18) Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Antiparallelogramms verbindet, so entsteht stets ein Rhombus.

19) Ist die Höhe eines Antiparallelogramms das arithmetische Mittel (vergl. §. 97.) zwischen den parallelen Seiten, so bestimmen die Mittelpunkte der 4 Seiten die Endpunkte eines Quadrats.

20) Verbindet man in einem Parallelogramm die Mittelpunkte zweier Gegenseiten mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinien die andere Diagonale in drei gleiche Stücke getheilt.

21) Halbirt man in einem Rhombus die Winkel, welche die Diagonalen bilden, so bestimmen die vier Durchschnittspunkte dieser Halbirenden mit dem Umfange die Eckpunkte eines Quadrats.

22) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der beiden Katheten und die Hypotenuse einzeln gleich sind.

23) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe beider Katheten und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

24) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Kathete und die Summe der beiden andern Seiten einzeln gleich sind.

25) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

26) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Hypotenuse gehörige Höhe und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

27) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Hypotenuse gehörige Höhe und eine Kathete einzeln gleich sind.

28) Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn ihre Höhen in beiden gleich sind.

29) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Schenkel und der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

30) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Schenkel und der Grundlinie, so wie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

31) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Differenz der Schenkel und der Grundlinie, so wie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

32) Der Abstand des Mittelpunkts der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks von einem Schenkel ist halb so gross, als die zum Schenkel gehörige Höhe.

33) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Grundlinie und zu den Schenkeln gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

34) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn ein Winkel und die zu seinen Schenkeln gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

35) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die zu den beiden andern gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

36) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Summe zweier Seiten und ihre Gegenwinkel einzeln gleich sind.

37) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Differenz zweier Seiten und ihre Gegenwinkel einzeln gleich sind.

38) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind.

39) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Differenz der beiden andern und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind.

40) Zwei Winkel sind congruent, wenn der Umfang und zwei Winkel einzeln verglichen gleich sind.

41) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden zwischen denselben liegenden Winkel einzeln in ihnen gleich sind.

42) Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle Seiten und ein beliebiger Winkel einzeln in beiden gleich sind.

43) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel in ihnen einzeln gleich sind, und ausserdem die Summe dieser beiden Winkel grösser ist, als die Summe der beiden andern.

44) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer von den eingeschlossenen Winkeln und sein Gegenwinkel in dem

einen den entsprechenden Stücken in dem andern einzeln gleich sind, und die anderen an den nicht gleichen Seiten liegenden Winkel zugleich spitze oder stumpfe sind.

45) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer der eingeschlossenen Winkel und der mit diesem an derselben Seite liegende nicht eingeschlossene des einen Vierecks einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich, und ausserdem die beiden Gegenwinkel des ersteren Paares zugleich kleiner oder grösser als ein Rechter sind.

46) Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

47) Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln zweien Seiten des andern gleich sind, der eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck aber das Supplement (zu $2R$) von dem entsprechenden Winkel des andern Dreiecks ist.

48) Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien auf derselben Geraden liegen und die Geraden, welche man von der Spitze eines jeden Dreiecks nach den Endpunkten der Grundliniedes andern zieht, einzeln unter sich parallel sind.

49) Halbirt man zwei Gegenseiten eines Vierecks und verbindet den Halbirungspunkt einer jeden mit den Endpunkten der andern Seiten, so sind die beiden so entstandenen Dreiecke zusammen so gross als das Viereck.

50) Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Lothe auf dessen Seiten, so ist die Quadratsumme von drei solchen Seitenstücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen.

51) Beschreibt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks abwärts von den beiden andern ein Quadrat, und verbindet die Endpunkte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks auslaufender Quadratseiten, so sind die Dreiecke, welche diese Verbindenden mit den genannten Quadratseiten bilden, stets unter einander und mit dem Urdreiecke gleichflächig.

52) Wenn man die Seiten eines Dreiecks nach einerlei Richtung so verlängert, dass jede Verlängerung der verlängerten Seite gleich ist, so ist die Fläche des dadurch bestimmten Dreiecksringes das Sechsfache des Grunddreiecks.

53) Schneidet man auf jeder Seitenverlängerung das $n$fache der verlängerten Seite ab, so ist, wenn Δ den Inhalt des gegebenen Dreiecks bezeichnet, der Inhalt des durch die Abtragungspunkte bestimmten und um das Urdreieck verminderten Dreiecks $3n(n+1).\Delta$, wo n jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

53) Werden auf den nach einerlei Richtung verlängerten Seiten eines einfachen Vierecks vom Anfangspunkte jeder Verlängerung aus Stücke abgeschnitten, welche das $n$fache der jedes-

mal verlängerten Seiten sind, so ist der Inhalt des durch die Abtragungspunkte bestimmten Vierecks, vermindert um das Urviereck (des Vierecksringes), das $2n(n+1)$ fache des Grundvierecks*).

Zweites Kapitel.

Aufgaben.

55) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

56) Einen gestreckten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

57) Constructionsaufgaben für Dreiecke und Vierecke geben die Congruenzsätze 22—46. Andere sind:

58) Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten und der Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels.

59) Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, dessen Halbirungslinie und der zur Gegenseite gehörigen Höhe.

60) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, einem ihr anliegenden Winkel und der Verbindungslinie des Mittelpunkts der gegebenen Seite mit der Spitze des Gegenwinkels.

61) Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, der von seiner Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Transversale und der Gegenseite selbst.

62) Ein Dreieck zn construiren aus einer Seite, der ihr zugehörigen Höhe und der an die Mitte der Seite von der Gegenspitze gezogenen Transversale.

63) Ein Dreieck zu construiren aus einer Höhe, der aus derselben Winkelspitze nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Transversale und einem Winkel an jener Gegenseite.

64) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Höhe, der Unterschied der von ihr auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte und der grössere der dieser Seite anliegenden Winkel gegeben sind.

65) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Summe der Grundlinie und des Schenkels nebst einem seiner Winkel.

66) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Summe seiner beiden Höhen nebst einem seiner Winkel.

67) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren aus der Summe der Seite und Höhe.

---

*) Die drei letzten Sätze sind der überaus werthvollen, fast lauter neue Entdeckungen im Gebiete der Geometrie enthaltenden Schrift: „Geometrische Ausläufer" vom Schulrath Dr. Müller in Wiesbaden, Halle 1847, entnommen.

68) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren aus der Differenz der Seite und Höhe.

69) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letzteren gegeben sind.

70) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, der Differenz der beiden andern und dem Unterschiede der Gegenwinkel dieser letzteren.

71) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes solches zu beschreiben, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des ersteren stehen.

72) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche, mit gegebenem Radius beschrieben, eine gerade Linie berühren.

73) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berühren.

74) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene gerade Linie in einem gegebene Punkte berührt.

75) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche, mit gegebenem Radius beschrieben, einen gegebenen Kreis von aussen berühren. (Ist dies zugleich der Ort für die von innen berührenden Kreise?)

76) Von einem gegebenen Punkte aus, welcher innerhalb oder ausserhalb eines gegebenen Kreises liegt, einen zweiten Kreis zu beschreiben, welcher den gegebenen berührt.

77) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche zwei gegebene Parallelen berühren.

78) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels berühren.

79) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen andern Kreis berührt, und durch einen ausserhalb oder innerhalb desselben gegebenen Punkt geht.

80) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei andere, ihrer Grösse und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Anmerk. Eine vollständige Behandlung des Problems von den Berührungen s. in meiner Schrift: Die schwierigeren Aufgaben aus Jacobi's Anhängen zu van Swinden's Geometrie. Halle 1849

Mathematische Schriften

des

Herrn Dr. August Wiegand,

welche im Verlage des Unterzeichneten erschienen sind.

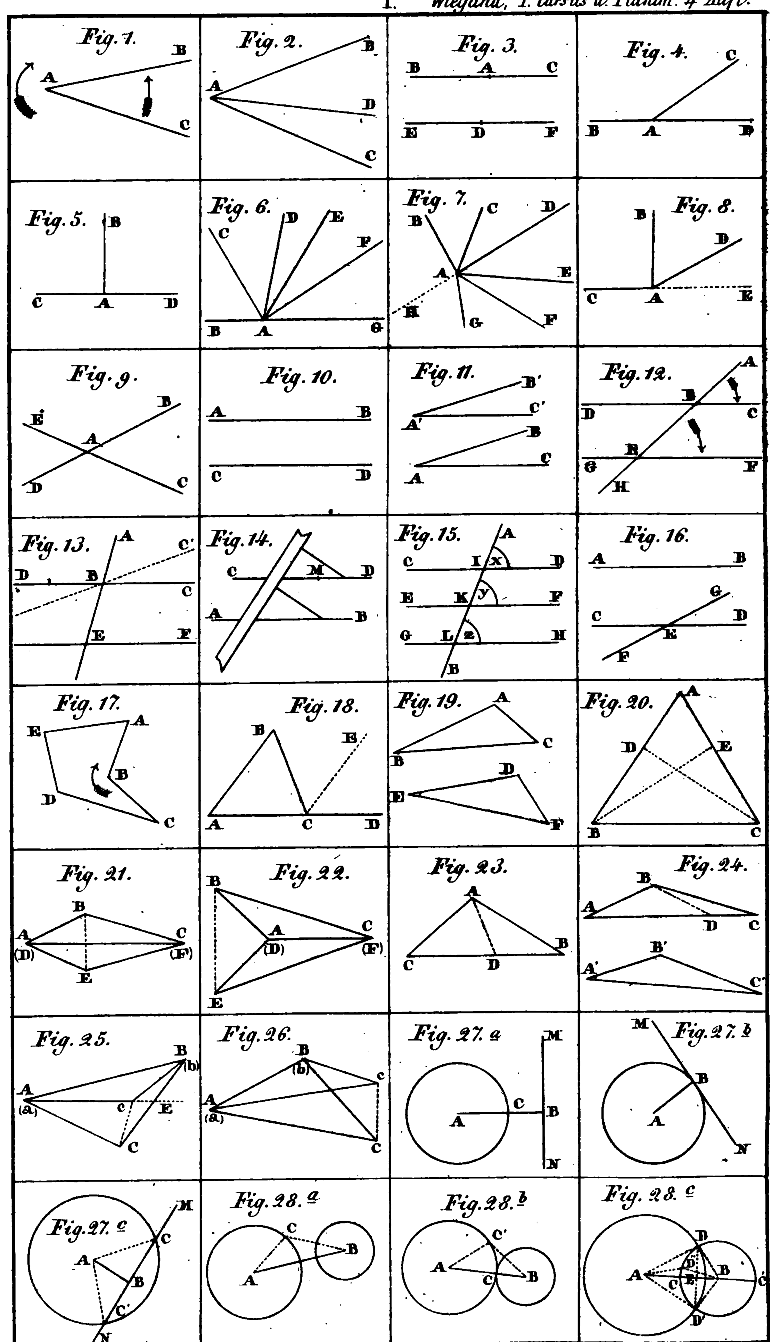
1) **Lehrbuch der Mathematik,** umfassend:
   - a) Lehrbuch der Planimetrie. I. Curs. 4. Aufl. 1852. 10 Sgr.
   - b) Lehrbuch der Planimetrie. II. Curs. 3. Aufl. 1851. 10 Sgr.
   - c) Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 2. Aufl. 1851. 10 Sgr.
   - d) Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. 1846. 15 Sgr.
   - e) Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 2. Aufl. 1850.
   - f) Lehrbuch der algebraischen Analysis. 1847. 12½ Sgr.
2) **Die Elemente der Geometrie und deren praktische Anwendung** für den Bürger und Landwirth; insbes. auch für landwirthschaftl Lehranstalten, Fortbildungs- u. Sonntagsschulen, sowie für Volksschullehrer. 1848. 10 Sgr.
3) **Der geodätische Messapparat und sein Gebrauch.** 2. Aufl. 1848. 6 Sgr.
4) **Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks** mit Rücksicht auf harmonische Theilung. 2. Aufl. 1848. 15 Sgr.
5) **Der allgemeine goldene Schnitt** und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung. 1848. 6 Sgr.
6) **Trigonaltriaden in arithmetischer und geometrischer Progression.** 1850. 4 Sgr.
7) **Lehrsätze und Aufgaben** aus Jacobi's Anhängen zu v. Swindens Elementen der Geometrie. 2 Bände. 1847. 1 Thlr. 24 Sgr.
8) **Wiegand** und **Cornelius, Grundriss der mathematischen und physikalischen Geographie** für die obern Klassen höherer Lehranstalten. 2 Bände.
   - 1r enthält: **Grundriss der mathematischen Geographie.** Von Dr. A. Wiegand. 2. Aufl. 1851. 10 Sgr.
   - 2r enthält: **Grundriss der physikalischen Geographie.** Von Dr. C. Cornelius. 1851. 15 Sgr.

Herr Dr. Wiegand übersetzte aus dem Englischen:

9) **Rutherford und Fenwick,** Sätze aus der Coordinaten-Geometrie. 1846. 6 Sgr.
10) **Rutherford,** die vollständige Lösung numerischer Gleichungen. 1849. 15 Sgr.

Halle, November 1851. ***H. W. Schmidt.***

Verlags-, Sortiments- und Antiquariats-Buchhändler.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27. a
Fig. 27. b
Fig. 27. c
Fig. 28. a
Fig. 28. b
Fig. 28. c

